Piotr Śniady

Zadania domowe po wykładzie *Unikając zderzeń*

24 marca 2021

Literatura do zadań domowych:

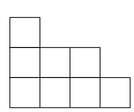
- o zasadzie odbicia oraz o prawie arcusa sinusa: William Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa* (tom 1),
- o zasadzie odbicia w elektrostatyce: Richard P. Feynmann, *Feynmanna wykłady z fizyki* (tom 2.1, rozdziały 6.6–6.9; Feynmann używa nazwy *metoda obrazów*),
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Lindström-Gessel-Viennot_lemma`

Wszystkie poniższe problemy są związane z zasadą odbicia i / lub lematem Lindströma, Gessela, Viennota.

1. (ostrożnie, fizyka!)
   - W odległości l nad nieskończoną płaszczyzną wykonaną z metalu umieszczono punktowy ładunek elektryczny Q. Wyznacz siłę, z jaką płaszczyzna przyciąga ładunek.
   - Dwie nieskończone płaszczyzny wykonane z metalu przecinają się pod kątem prostym. W ogległości a od jednej z nich oraz w odległości b od drugiej umieszczono ładunek Q. Wyznacz siłę działającą na ładunek. Jak zmieni się wzór, jeśli kąt między płaszczyznami wynosi $60°$, a ładunek znajduje się w jednej z dwóch ćwiartek przestrzeni, które ograniczone są kątem ostrym?
2. Ile jest *ścieżek Catalana* długości $2n$? To znaczy: ile jest ciągów $(a_1, \dots, a_{2n})$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, +1\}$ o tej własności, że $a_1 + \cdots + a_{2n} = 0$ oraz że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant 2n$ zachodzi $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 0$? Hint: zasada odbicia. Humor może poprawić informacja, że jest to historia o Angelinie Jolie nad krawędzią przepaści w innych dekoracjach.
3. Ile jest *bezpiecznych ścieżek* długości $2n$? To znaczy: ile jest ciągów $(a_1, \dots, a_{2n})$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, +1\}$ o tej własności, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant 2n$ zachodzi $a_1 + \cdots + a_k > 0$? Hint: zasada odbicia. Kolejne zadanie o przepaści.
4. *Standardowe tableau Younga*

4			
2	6	7	
1	3	5	8

to dowolne wypełnienie zadanego *diagramu Younga*



liczbami $1, \dots, n$ o tej własności, że każda liczba użyta jest dokładnie raz, każdy wiersz jest rosnący (od lewej do prawej), a każda kolumna jest rosnąca (z dołu do góry). Znajdź wzór na liczbę standardowych tableau Younga o zadanym kształcie $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, gdzie $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ to długości kolejnych wierszy (zaczynając od dolnego). Hint: lemat LGV.

Wersja z 26 marca 2021, godz. 08:08

5. Zadanie o tajemniczej stałej, której prowadzący nie chciał wyjawić podczas wykładu (slajd $\longrightarrow$*dwóch losowych nerwowych kolesiów*). Na liczbach całkowitych $\mathbb{Z}$ spacerują dwa ludziki. Ludzik numer $i \in \{1,2\}$ znajduje się początkowo w parzystej licznie x_i; w każdej sekundzie ludzik wykonuje krok o jednostkę w prawo (z prawdopodobieństwem p_i) lub krok o jednostkę w lewo (z prawdopodobieństwem $q_i = 1 - p_i$). Zakładamy, że $x_1 < x_2$ oraz $y_1 < y_2$. Czekamy t sekund. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo tego, że po upływie t sekund pierwszy ludzik znajdzie się w punkcie y_1, drugi ludzik w punkcie y_2 oraz przez cały ten czas ludziki się nie zderzą, wynosi

$$\mathbb{P}_{\mathrm{BK}}(x_1, x_2 \to y_1, y_2) = \mathbb{P}_1(x_1 \to y_1)\ \mathbb{P}_2(x_2 \to y_2) - \left(\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{x_2 - x_1}{2}} \mathbb{P}_1(x_2 \to y_1)\ \mathbb{P}_2(x_1 \to y_2),$$

gdzie $\mathbb{P}_i(a \to b)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że ludzik numer i startujący z punktu a po t sekundach znajdzie się w punkcie b. Jak wygląda analogiczny wzór dla trzech ludzików?

6. (To dość trudne zadanie, ale rzuca ono światło na część odczytu zatutułowaną *Science fiction.*) *Algorytm Robinsona–Schensteda* zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy:
   - ciągami $(a_1, \dots, a_n)$ o wyrazach z jakiegoś uporządkowanego zbioru Z, oraz
   - parami (P, Q), gdzie P jest *semistandardowym tableau* o elementach ze zbioru Z; ponadto Q jest standardowym tableau Younga; tableau P oraz Q mają ten sam kształt.

   Stosujemy algorytm Robinsona–Schensteda do ciągu $a_1, \dots, a_n$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie

   $$\mathbb{P}\big(a_i = 1\big) = p, \qquad \mathbb{P}\big(a_i = 2\big) = q = 1 - p.$$

   Tableau P nie będzie nam dziś potrzebne. Tableau Q ma (najwyżej) dwa wiersze. Dla każdego $t \in \{0, \dots, n\}$ w chwili t umieszczamy Bruce'a Willisa niedaleko przepaści w punkcie

   (liczba wyrazów tableau Q w dolnym wierszu, które są $\leqslant t$)$-$
   (liczba wyrazów tableau Q w górnym wierszu, które są $\leqslant t$).

   Udowodnij, że taki Bruce Willis zachowuje się tak samo (czyli rozkład prawdopodobieństwa jego trajektorii jest taki sam), jak Angela Jolie podczas pierwszych n kroków swego nieskończonego spaceru, który rozpoczyna nad samą krawędzią przepaści w punkcie 0, potem w każdej jednostce czasu przesuwa się w prawo z prawdopodobieństwem p lub w lewo z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$, **i jest uwarunkowana, aby nigdy nie wpaść do przepaści**. Aby się nie stresować, załóż że $p > \frac{1}{2}$.

   Jeśli $a_1, \dots, a_n$ to ciąg niezależnych zmiennych o tym samym rozkładzie na zbiorze $\{1, 2, 3\}$, tableau Q może być zinterpretowane jako historia trzech kolesiów; w jednostce czasu dokładnie jeden z nich (wybrany losowo) przesuwa się o jednostkę w prawo i są oni uwarunkowani, aby nigdy się nie zderzyć.