Unikając zderzeń

Piotr Śniady IMPAN

notatki → psniady.impan.pl/lgv

24 III 2021

AUDYCJA ZAWIERA LOKOWANIE PRODUKTU

tu jesteś w siebie

plan:

- zadanie o jednym holesiu
- zadanie o dwóch nerwowych holesiach
- zadanie o trzech nerwowych holesiach

kombinatoryka enumeratywna...

- Bruce Willis / Angelina Jolie nad przepaścią

... i rachunek prawdopodobieństwa

- Science Fiction

szersza perspektywa

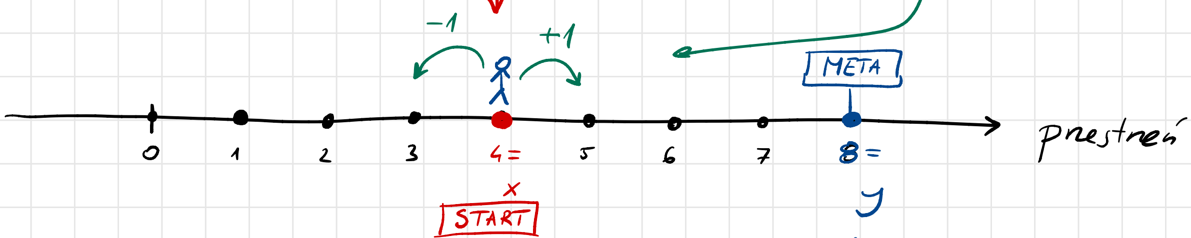
notatki → psniady.impan.pl/lgv

lub w zakładce LECTURE NOTES

jeden koleś na $\mathbb{Z}$

koleś zaczyna spacer w parzystej liczbie całkowitej x

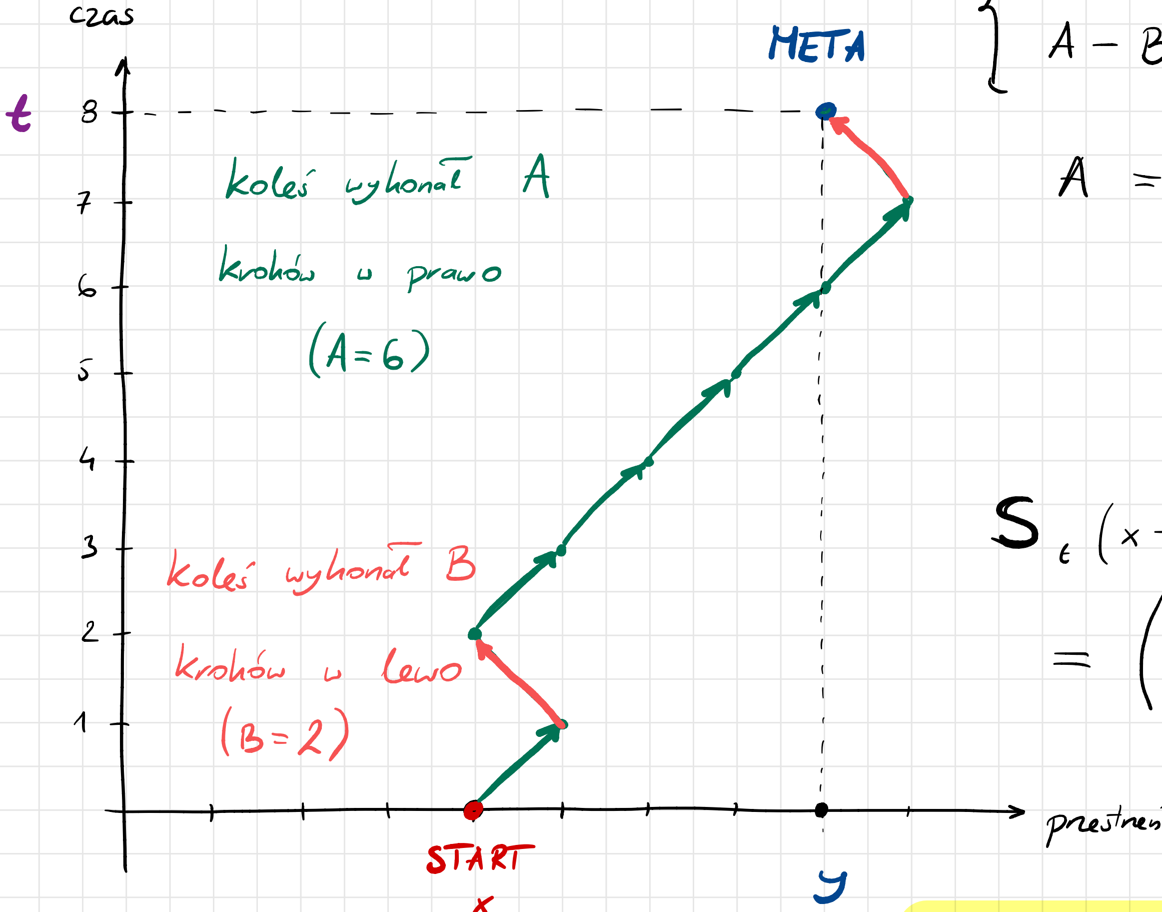
w jednym kroku koleś przesuwa się o jednostkę w lewo lub w prawo



koleś ma zakończyć spacer w parzystej liczbie całkowitej y

$S_t(\text{start} \longrightarrow \text{meta})$ = liczba sposobów, w jakie koleś może przejść z punktu startu do mety w t krokach, t parzyste = ?

szczegóły nie są istotne



$$\begin{cases} A + B = t \\ A - B = y - x \end{cases}$$

$A = \dots$

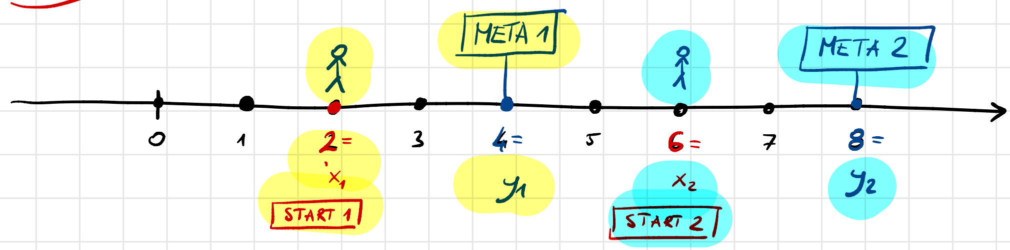
$\boxed{\text{EASY}}$

$$S_t(x \to y) = \binom{t}{A}$$

ważne, że umielibyśmy to policzyć

dwóch kolesiów

koleś 1 gościówa 2



W jak wszystkie

$$W_t(x_1, x_2 \longrightarrow y_1, y_2) =$$

= liczba sposobów, w jakie koleś i gościówa mogą przejść w t krokach

z x_1 do y_1 oraz z x_2 do y_2

EASY

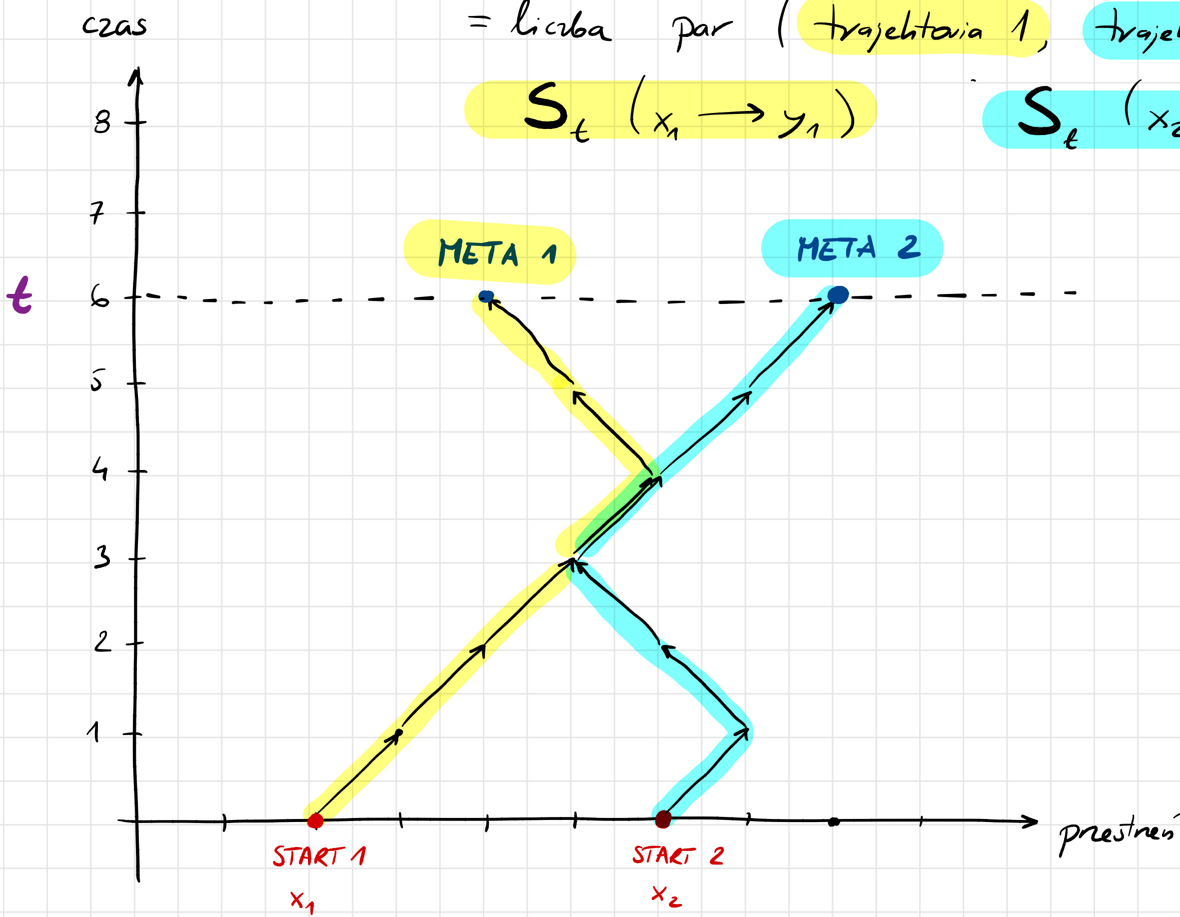
$$= S_t(x_1 \longrightarrow y_1) \cdot S_t(x_2 \longrightarrow y_2)$$

W jak wszystkie

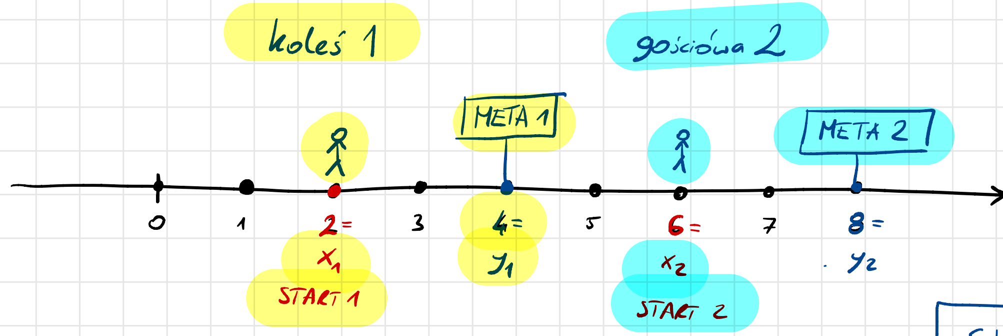
$$W_t(x_1, x_2 \longrightarrow y_1, y_2)$$

$$= \text{liczba par } (\text{trajektoria } 1, \text{ trajektoria } 2) =$$

$$S_t(x_1 \longrightarrow y_1) \quad S_t(x_2 \longrightarrow y_2)$$



dwóch nerwowych kolesiów



Stałe założenie:

$x_1 < x_2$

$y_1 < y_2$

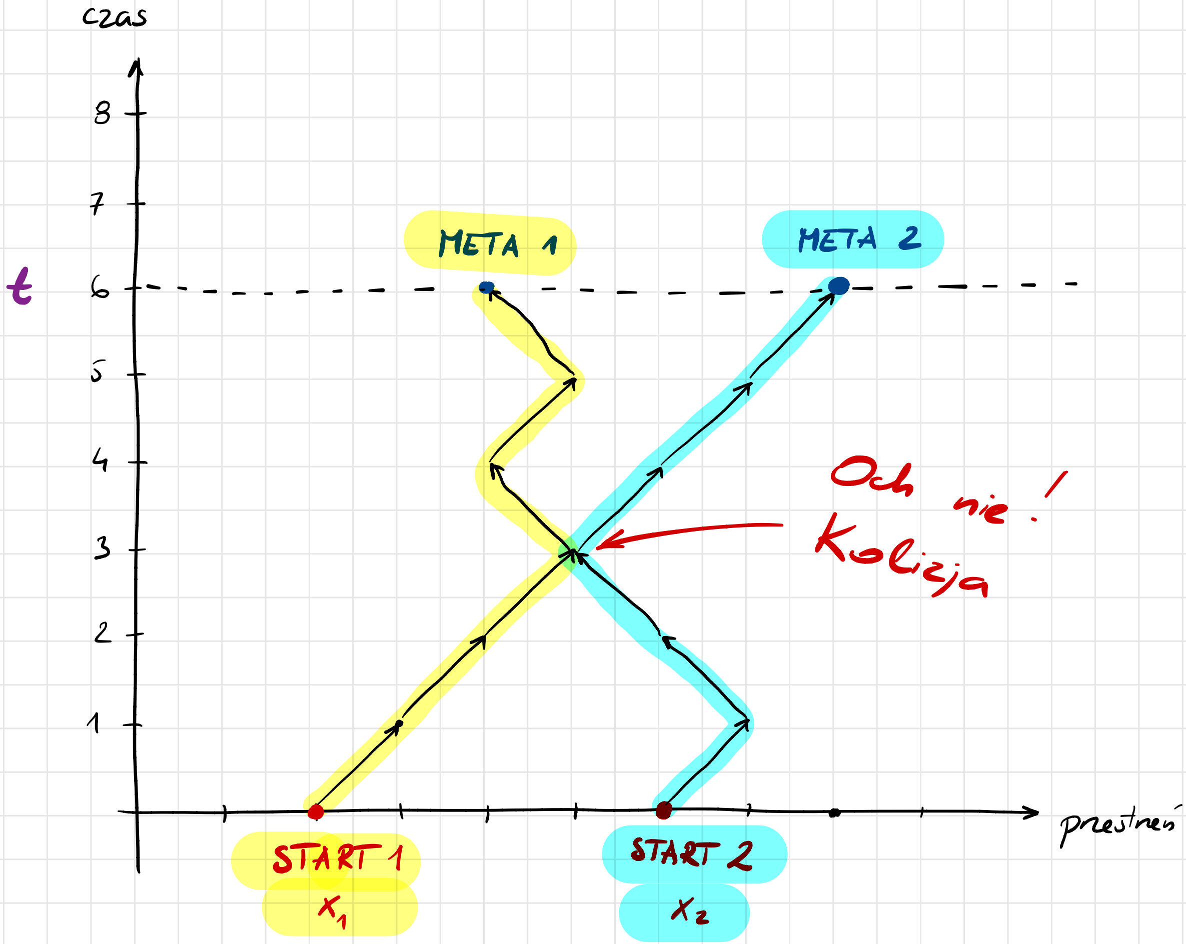
wersja bezkolizyjna

$$BK_t(x_1, x_2 \longrightarrow y_1, y_2) =$$

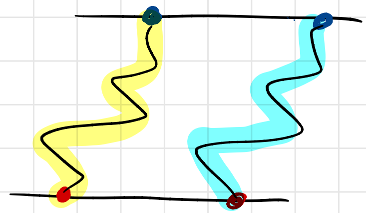
= liczba sposobów, w jakie koleś i gościówa mogą przejść w t krokach z x_1 do y_1 i z x_2 do y_2

→ tak, aby nigdy się nie dotknąć ←

$= ?$

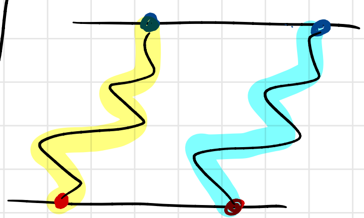

czas
8
7
6
5
4
3
2
1
t
META 1
META 2
Och nie!
Kolizja
przestrzeń
START 1
x_1
START 2
x_2

BK (liczba sposobów bezkolizyjnych) = # {

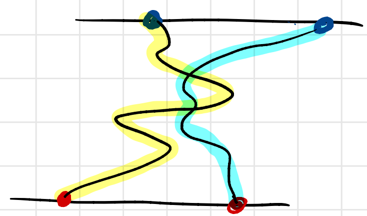


} =

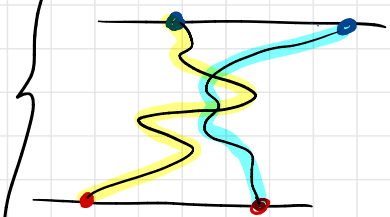
= # {



,



} − # {



}

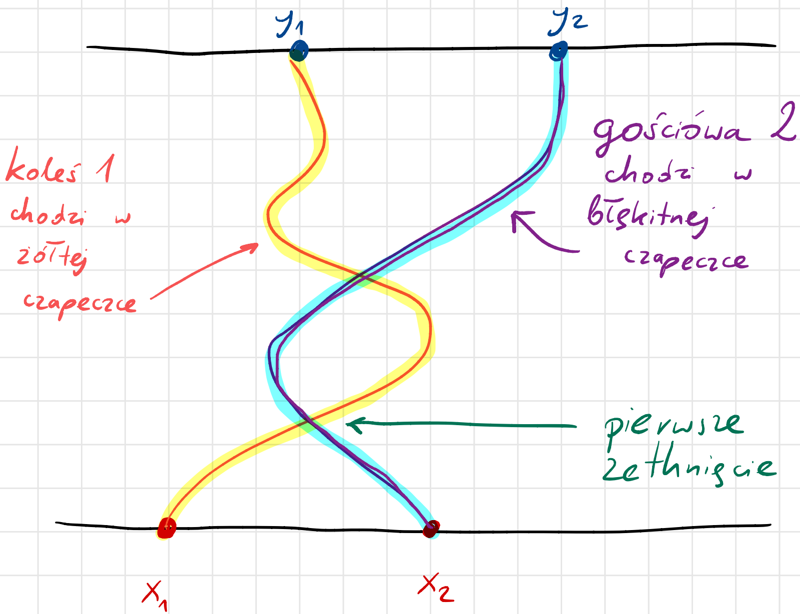
= **W** (liczba wszystkich sposobów) EASY − **K** (liczba sposobów z kolizją) ?

$$K_t(x_1, x_2 \longrightarrow y_1, y_2) = W_t(x_1, x_2 \longrightarrow y_2, y_1)$$

bijekcja

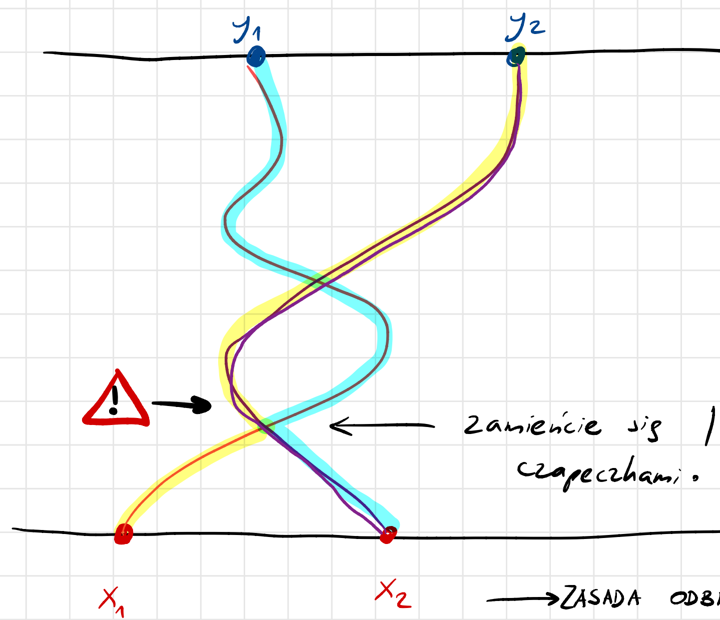
trajektoria z kolizją

$x_1 \longrightarrow y_1$ $\quad$ $x_2 \longrightarrow y_2$



dowolna trajektoria

$x_1 \longrightarrow y_2$ $\quad$ $x_2 \longrightarrow y_1$



→ ZASADA ODBICIA

next slide: finalny wzór

bez kolizji

finalna odpowiedź

$$BK_t(x_1, x_2 \to y_1, y_2) =$$

wersja A

$$= W_t(x_1, x_2 \to y_1, y_2) - W_t(x_1, x_2 \to y_2, y_1)$$

wersja B

$$= S_t(x_1 \to y_1)\ S_t(x_2 \to y_2) - $$

$$- S_t(x_1 \to y_2)\ S_t(x_2 \to y_1)$$

wersja C

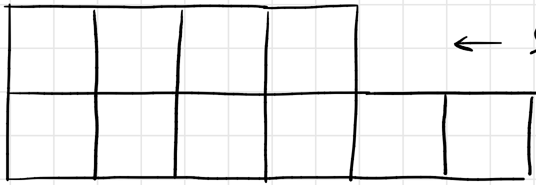
$$= \det \begin{vmatrix} S_t(x_1 \to y_1) & S_t(x_1 \to y_2) \\ S_t(x_2 \to y_1) & S_t(x_2 \to y_2) \end{vmatrix}$$

NEXT SLIDE. SYT

HOMEWORK

morał?

to jest **diagram Younga** (λ_1, λ_2); zakładamy, że $\lambda_1 \geq \lambda_2$



← λ_2 klatek

← λ_1 klatek

to jest przykład **tableau Younga** o kształcie (λ_1, λ_2)

2	5	8	10		
1	3	4	6	7	9

każda liczba $1, 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$ jest użyta jeden raz

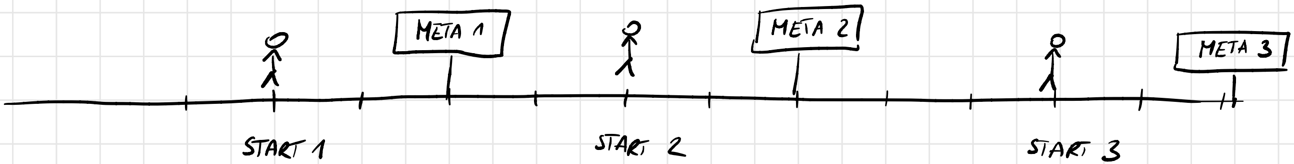
każdy wiersz jest rosnący

każda kolumna jest rosnąca

Korzystając inteligentnie z zadania o nerwowych kolesiach **wyznacz liczbę tableau Younga o kształcie (λ_1, λ_2)**

morał?

trzech nerwowych kolesi



$$BK_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_1, y_2, y_3) = \, ?$$

$x_1 < x_2 < x_3$

$y_1 < y_2 < y_3$

<u>bez</u> <u>kolizji</u>

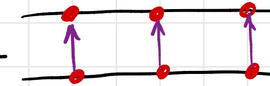
$\longrightarrow$ Lemat Lindströma - Gessela - Viennota

LGV

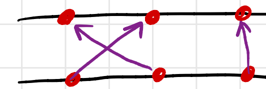
permutacje zbioru $\{1,2,3\}$

$$BK_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_1, y_2, y_3)$$

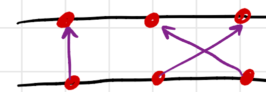
$$= +W_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_1, y_2, y_3)$$

$=$ $+$ 

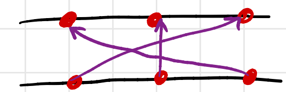
$$-W_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_2, y_1, y_3)$$

$-$ 

$$-W_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_1, y_3, y_2)$$

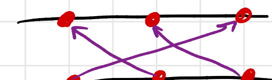
$-$ 

$$-W_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_3, y_2, y_1)$$

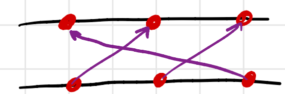
$-$ 

znak zależy od parzystości permutacji czyli liczby przecięć

$$+W_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_3, y_1, y_2)$$

$+$ 

$$+W_t(x_1, x_2, x_3 \longrightarrow y_2, y_3, y_1)$$

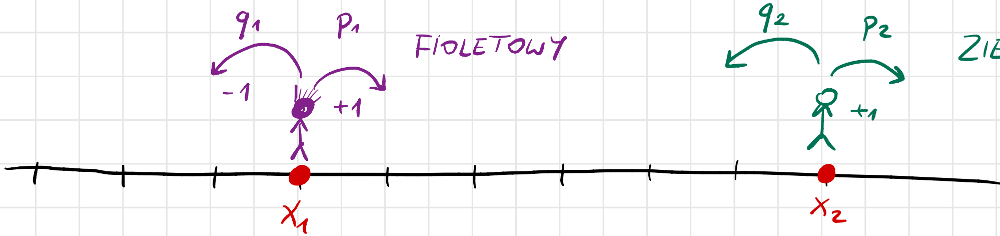
$+$ 

→ MILION ZASTOSOWAŃ

→ WYZNACZNIK

→ KOMBINATORYKA ENUMERATYWNA

dwóch losowych nerwowych kolesiów



$p_1 < p_2$

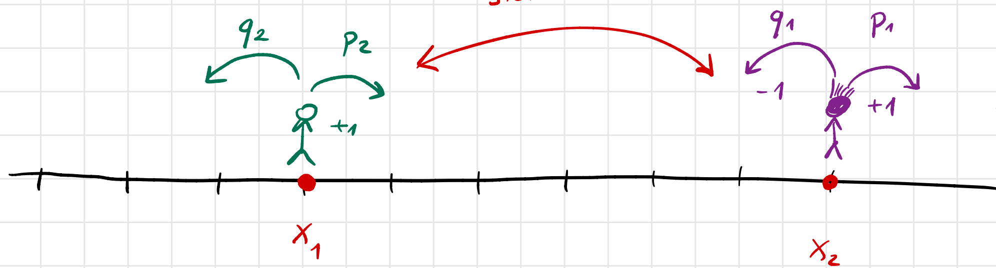
LOW PRIORITY

- $$\mathbb{P}_{BK}(x_1, x_2 \longrightarrow y_1, y_2) = \mathbb{P}_1(x_1 \longrightarrow y_1)\,\mathbb{P}_2(x_2 \longrightarrow y_2)$$

$$- \begin{pmatrix}\text{magiczna liczba} \\ \text{zależna od } x_1, x_2 \\ p_1, p_2, q_1, q_2\end{pmatrix} \mathbb{P}_1(x_2 \longrightarrow y_1)\,\mathbb{P}_2(x_1 \to y_2)$$

prawdopodobieństwo, że startując z x_1, x_2 po t krokach będą w y_1, y_2 oraz nie będzie kolizji

zamienione punkty startu



prawdopodobieństwo tego, że kolesie startujący z x_1, x_2 w czasie t się nie zderzą

$$\sum_{y_1<y_2} \mathbb{P}_{BK}\left(x_1, x_2 \longrightarrow y_1, y_2\right) =$$

prawdopodobieństwo tego, że startując z x_1 i x_2 po czasie t fioletowy będzie na lewo od zielonego

$$= \sum_{y_1<y_2} \mathbb{P}_1\left(x_1 \longrightarrow y_1\right) \mathbb{P}_2\left(x_2 \longrightarrow y_2\right)$$

prawdopodobieństwo tego, że startując z x_2 i x_1 po czasie t fioletowy będzie na lewo od zielonego

$$- \left(\begin{array}{l}\text{magiczna liczba} \\ \text{zależna od } x_1, x_2 \\ p_1, p_2, q_1, q_2\end{array}\right) \sum_{y_1<y_2} \mathbb{P}_1\left(x_2 \longrightarrow y_1\right) \mathbb{P}_2\left(x_1 \rightarrow y_2\right)$$

prawdopodobieństwo happy endu: kolesie NIGDY się nie zderzą

$$H_{x_1,x_2} = \lim_{t\to\infty}\left(\begin{array}{c}\text{prawdopodobieństwo tego, że kolesie startujący z } x_1, x_2 \\ \text{w czasie } t \text{ się nie zderzą}\end{array}\right) =$$

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\begin{array}{c}\text{prawdopodobieństwo tego, że startując z } x_1 \text{ i } x_2 \\ \text{po czasie } t \text{ fioletowy będzie na lewo od zielonego}\end{array}\right)}_{=1}$$

$$-\left(\begin{array}{c}\text{magiczna liczba} \\ \text{zależna od } x_1, x_2 \\ p_1, p_2, q_1, q_2\end{array}\right)\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\begin{array}{c}\text{prawdopodobieństwo tego, że startując z } x_2 \text{ i } x_1 \\ \text{po czasie } t \text{ fioletowy będzie na lewo od zielonego}\end{array}\right)}_{=1}$$

Morał: lemat LGV daje odpowiedź na pytanie o szanse na to, że ludzie NIGDY się nie zderzą.

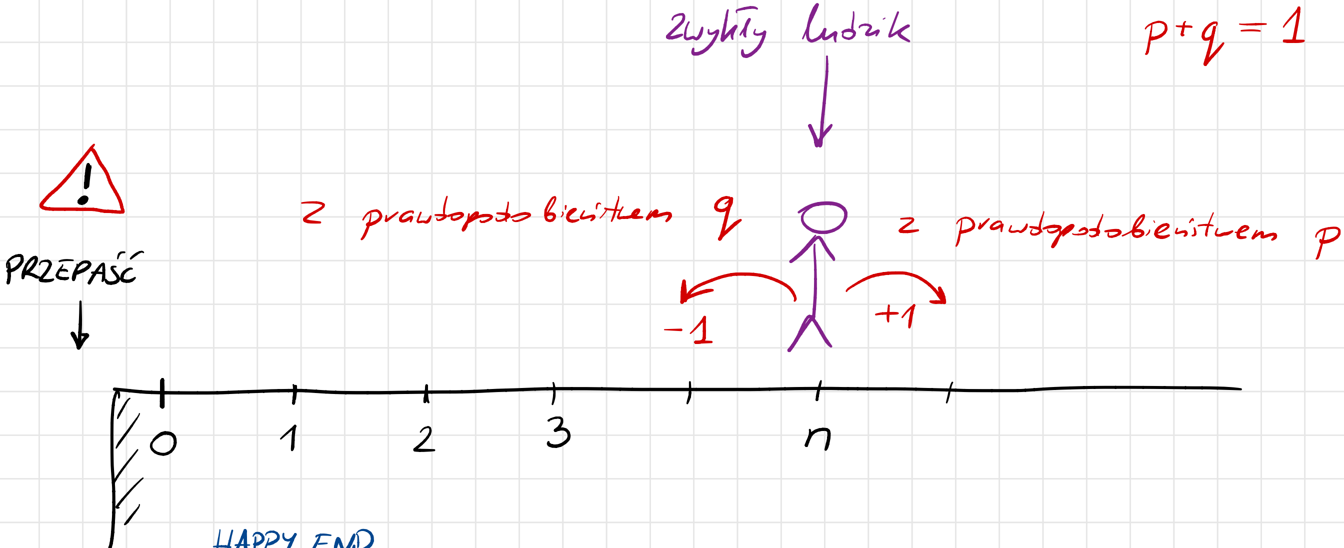
Do tego pytania wrócimy w problemie Angeliny Jolie

Bruce Willis / Angelina Jolie

notatki → psniady.impan.pl/lgv

lub w zakładce LECTURE NOTES

$p + q = 1 \qquad p > q$



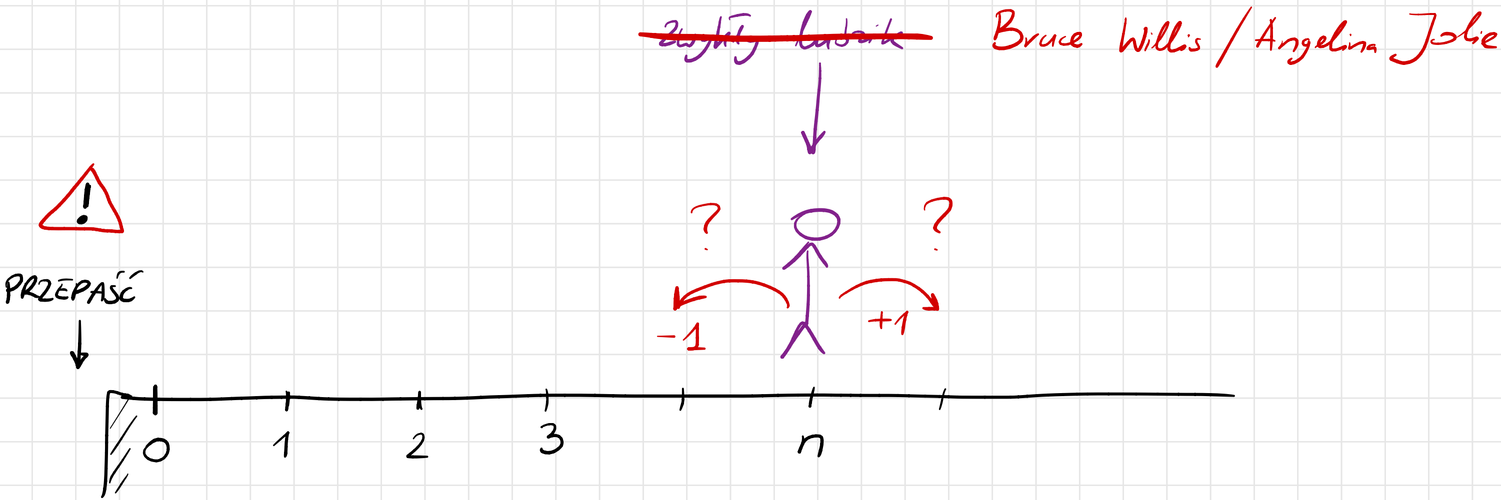
HAPPY END

H_n = prawdopodobieństwo tego, że ludzik <u>nigdy</u> nie wpadnie w przepaść

$$\begin{cases} H_{-1} = 0 & \text{hehe} \\ H_n = q H_{n-1} + p H_{n+1} & \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

(dlaczego?) $\Longrightarrow$ $$H_n = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

Co z $p = q = \frac{1}{2}$?



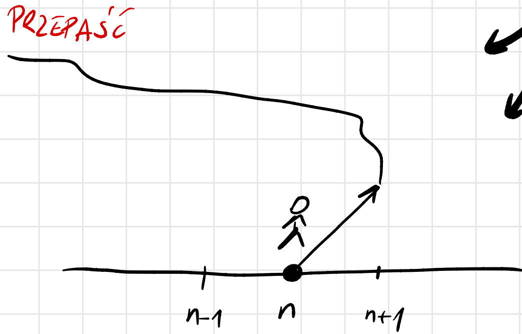
Angelina Jolie to taki ludzik, o którym z góry wiemy, że nigdy nie wpadnie do przepaści

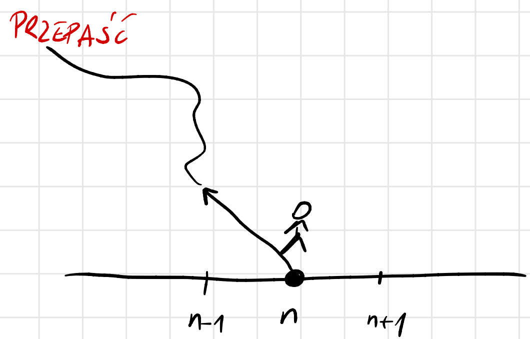
Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że AJ zrobi krok w prawo?

„prawdopodobieństwo warunkowe"

$\mathbb{P}$

HISTORIE ZWYKŁYCH LUDZIKÓW

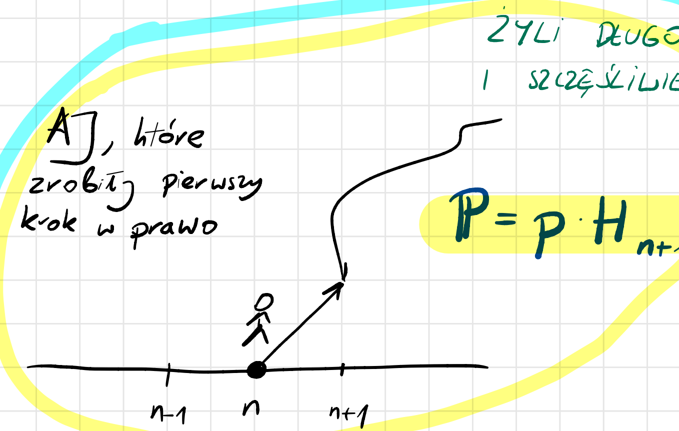




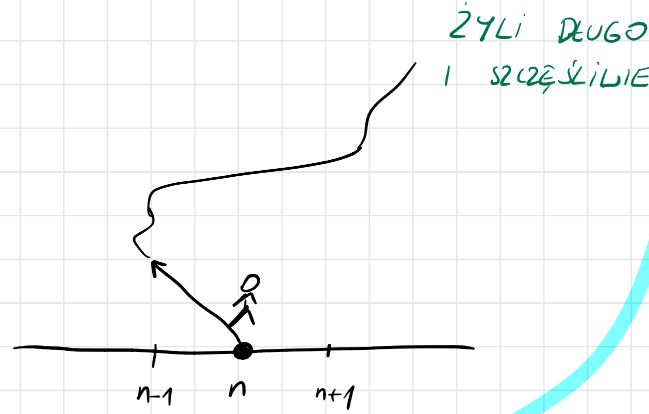
prawdopodobieństwo, że AJ wykona pierwszy krok w prawo

$$\mathbb{P} = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}}$$

AJ, które zrobiły pierwszy krok w prawo

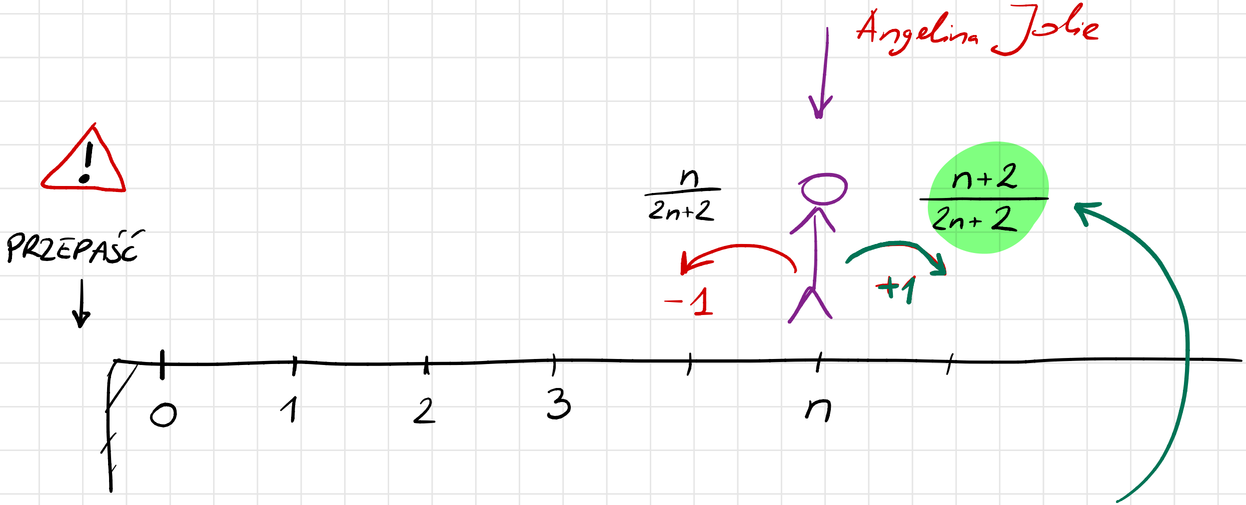


$$\mathbb{P} = p \cdot H_{n+1}$$



AJ

$$\mathbb{P} = H_n$$



prawdopodobieństwo tego, że AJ zrobi krok w prawo =

$$\frac{p\,H_{n+1}}{H_n} = \frac{p\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+2}\right]}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = \frac{p^{n+2}-q^{n+2}}{p^{n+1}-q^{n+1}}$$

$=1$ dla $n=1$

$\approx p$ dla $n \to \infty$

$\frac{n+2}{2n+2}$ dla $p=q=\frac{1}{2}$

Science fiction:

teoria reprezentacji

~~i te~~ OCENZUROWANO ~~macierzy losowych~~

Co najmniej jeden laureat medalu Fieldsa zajmował się tą dziedziną.

notatki → psniady.impan.pl/lgv

lub w zakładce LECTURE NOTES

jak narzędzia algebry liniowej mogą pomóc przy badaniu grup?

nasza ulubiona grupa, np. SU(2)

którą chcemy badać

skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa

$$\rho : G \longrightarrow \underbrace{\mathrm{End}\ V}_{\text{odwzorowania liniowe } V \to V \text{ czyli kwadratowe macierze}}$$

mechanika kwantowa

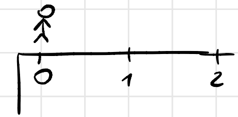
homomorfizm

V nazywamy reprezentacją grupy G

V jest reprezentacją nieredukowalną, jeśli nie jest sumą „mniejszych” reprezentacji nieredukowalne reprezentacje $SU(2)$ $\longleftrightarrow$ kombinatoryka

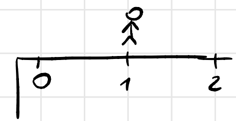
(reprezentacje $U(d)$?) (d ludzików na $\mathbb{Z}$!)

$V_0 = \mathbb{C}^1 \qquad \varrho_0(U) = [1] = \mathrm{id}$



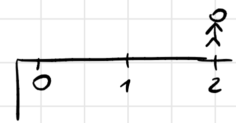
spin 0

$V_1 = \mathbb{C}^2 \qquad \varrho_1(U) = U$



spin $\frac{1}{2}\hbar$

$V_2 = \mathbb{C}^3 \qquad \varrho_2(U) = \left[\text{OCENZUROWANO}\right]$



spin $1\hbar$

$$V_1 \otimes V_1 = \underbrace{\left(\mathbb{C}^2 \overset{\text{SYM}}{\otimes} \mathbb{C}^2\right)}_{V_2} \oplus \underbrace{\left(\mathbb{C}^2 \overset{\text{ANTY SYM}}{\otimes} \mathbb{C}^2\right)}_{V_0}$$

iloczyn tensorowy reprezentacji

teoria reprezentacji $\longleftrightarrow$ kombinatoryka

Spacer losowy na nieredukowalnych reprezentacjach SU(2)

1. Weź nieredukowalną reprezentację V_n grupy SU(2)

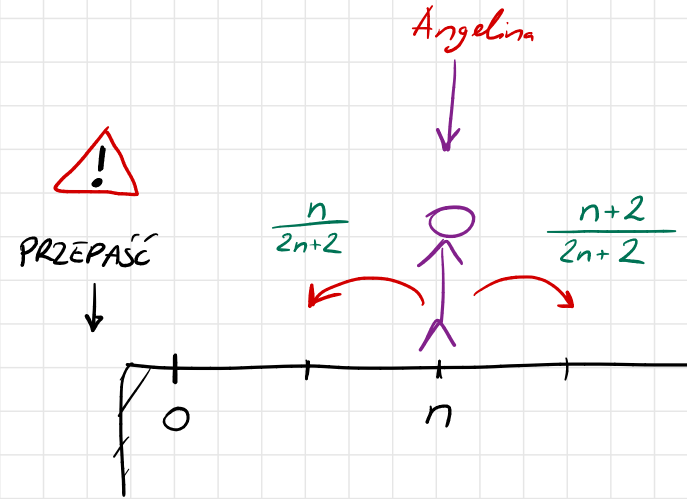
$$V_n \otimes V_1 = \overset{\text{wymiar}=n}{V_{n-1}} \oplus \overset{\text{wymiar } n+2}{V_{n+1}}$$

2. pomnóż z V_1 ...

3. ... rozłóż na nieredukowalne składniki i losowo wybierz jeden z nich proporcjonalnie do ich wymiarów

4. wróć do punktu 1

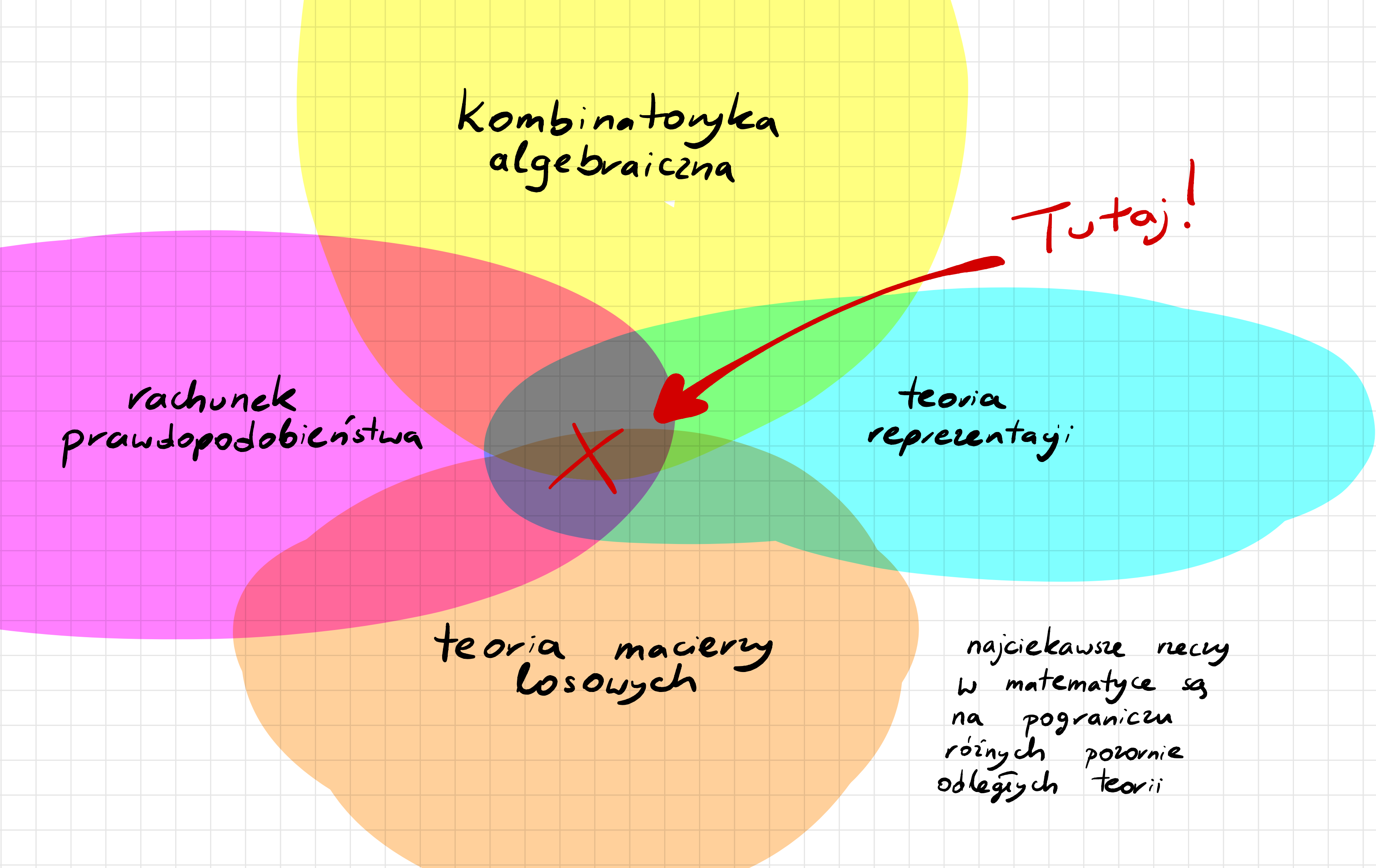
$\longrightarrow$ mechanika kwantowa



Epilog

notatki → psniady.impan.pl/lgv

lub w zakładce LECTURE NOTES



najciekawsze rzeczy w matematyce są na pograniczu różnych pozornie odległych teorii

jednostronicowe podsumowanie

(dla tych, którzy poszli do toalety i ominęli scenę, gdy detektyw ujawnia mordercę)

- jeśli chcesz zliczyć nieprzecinające się trajektorie, lemat Lindströma - Gessela - Viennota daje wygodną zamkniętą postać
- lemat LGV daje też inne, niespodziewane informacje, np. o prawdopobieństwie tego, że ludziki nigdy się nie zderzą...
- co pozwala zrozumieć zachowanie naszego modelu <u>warunkowe</u> - pod warunkiem, że <u>nigdy</u> nie nastąpi zderzenie / przepaść („Angelina Jolie")

Science Fiction

- to niezwykłe: to warunkowe zachowanie pojawia się w naturalny sposób w teorii reprezentacji i teorii macierzy losowych

Co warto czytać?

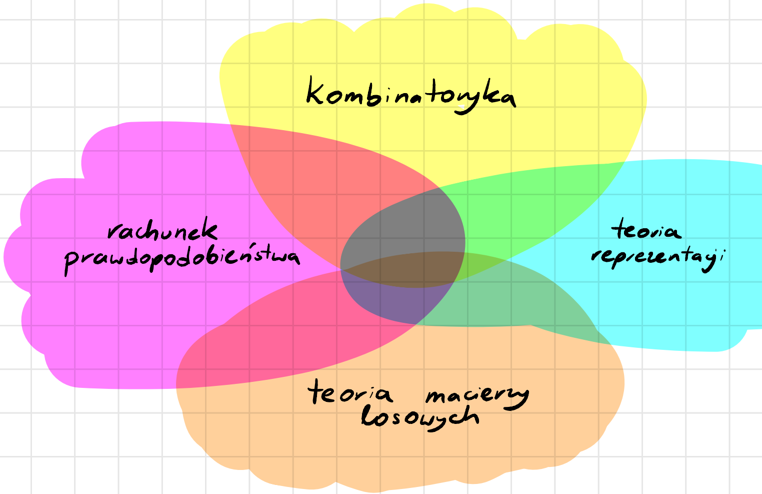
- lista zadań na stronie psniady.impan.pl/lgv

lub w zakładce LECTURE NOTES

- https://en.wikipedia.org/wiki/Lindström-Gessel-Viennot_lemma
- Richard Stanley, „Enumerative combinatorics"
- Miklós Bona, „Handbook of enumerative combinatorics"
- Dan Romik, „Surprising mathematics of longest increasing subsequences."

→ legalny plik na stronie autora

Szukasz promotora?



- Maciej Dołęga
  IMPAN Kraków
- Jacinta Torres
  Uniwersytet Jagielloński Kraków
- Piotr Śniady
  IMPAN Toruń

END OF FILE