1

Algebra grupowa $G$ - ($G$ skończona)

$$\mathbb{C}[G] = \{ f : G \to \mathbb{C} \}$$

SPLOT

$$(f_1 \cdot f_2)(g) = \sum_{\substack{h_1, h_2 \in G \\ h_1 h_2 = g}} f_1(h_1) f_2(h_2)$$

Przykład: tasowanie kart

Jako bazę liniową $\mathbb{C}[G]$ możemy wziąć

$$(\delta_h : h \in G)$$

Konwencja

$$\delta_h(g) = \begin{cases} 1 & g = h \\ 0 & \end{cases}$$

$h = \delta_h$

$$\delta_{h_1} \cdot \delta_{h_2} = \delta_{h_1 h_2}$$

algebra grupowa to formalne kombinacje liniowe elementów grupy

Fakt

Centrum $Z\mathbb{C}[G]$ to zbiór funkcji na $G$, stałych na klasach sprzężoności.

Cel: badanie $Z\mathbb{C}[S_n]$. Niby banalny obiekt: przemienna algebra. Ale bardzo ciekawe.

2

Klasy sprzężoności

~~Stałe strukturalne~~ w grupach permutacji

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$

$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$

Ćwiczenie: $|\mathcal{C}_\lambda| = ?$

$\mathcal{C}_\lambda$ - klasa sprzężoności w $S_n$

Ex. $\mathcal{C}_{1,\ldots,1} = \{e\}$

$\mathcal{C}_{2,1,1,\ldots,1} = \{ (i,j) \quad 1 \leq i < j \leq n \}$

$$C_\lambda = \sum_{\pi \in \mathcal{C}_\lambda} \pi \quad \in \mathbb{C}[S_n]$$

algebra grupowa

$$C_\lambda(\pi) = \begin{cases} 1 & \pi \in \mathcal{C}_\lambda \\ 0 & \pi \notin \mathcal{C}_\lambda \end{cases}$$

~~$\mathbb{C}[G]$ to algebra, której baza liniowa jest $(g : g \in G)$~~

~~$g \cdot h = gh$~~

$C_\lambda$ tworzą bazę $Z\mathbb{C}[S_n]$

$\lambda \vdash n$

③

$\lambda, \mu, \vdash n$

$\boxed{\text{stałe strukturalne}}$

$$C_\lambda C_\mu = \sum_{\nu \vdash n} c_{\lambda\mu}^{\nu} C_\nu$$

$$c_{\lambda\mu}^{\nu} = [C_\nu]\, C_\lambda \cdot C_\mu$$

$c_{\lambda\mu}^{\nu} = ?$

wybierz $\pi \in \mathcal{C}_\nu$

$$c_{\lambda\mu}^{\nu} = \left| \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) : \begin{array}{l} \sigma_1 \in \mathcal{C}_\lambda \\ \sigma_2 \in \mathcal{C}_\mu \\ \sigma_1 \sigma_2 = \pi \end{array} \right\} \right|$$

$$c_{\lambda\mu}^{\nu} \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

jak radzić sobie z punktami stałymi?

dla $\pi \vdash r$

$$\widetilde{\pi} := \pi \cup (1, \dots, 1) = \pi \cup 1^{n-r}$$

Klasy sprzężoności w $S_n$ można alternatywnie indeksować przy pomocy

$$C_{\pi; n} = C_{\widetilde{\pi}}$$ , gdzie

$|\pi| \leq n$

$m_1(\pi) = 0$ czyli

$\pi$ nie zawiera części równej $1$.

④ ⑤

dla $\pi \vdash r$

$\tilde{\pi} := \pi \cup 1^{n-r}$

Jeśli $|\pi| \leq n$,

$$C_{\pi;n} := C_{\pi,\underbrace{1,\dots,1}_{n-|\pi|}} \in \mathbb{C}[S_n].$$

**Tw. Farahat–Higman**

Dla $\lambda, \pi$ istnieją wielomiany $(q^{\nu}_{\lambda\pi} : \nu)$, $q^{\nu}_{\lambda\pi} = 0$ dla prawie wszystkich $\nu$

że:

$$C_{\lambda;n} \cdot C_{\pi;n} = \sum_{\substack{\nu \\ m_1(\nu)=0}} q^{\nu}_{\lambda\pi}(n)\, C_{\nu;n}$$

Przykład.

$$C_{2;n} \cdot C_{2;n} = 2\, C_{2,2;n} + 3\, C_{3;n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot C_{\emptyset;n}$$

Trudność: te stałe strukturalne zależą od $n$.

Jak się uwolnić od zależności od $n$?

6

## Częściowe permutacje.

$$\alpha = (d, \omega) \quad \text{to } \underline{\text{częściowa permutacja}},$$

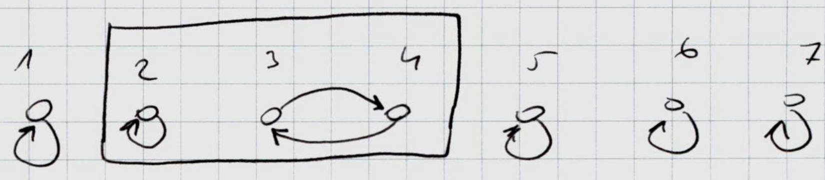
jeśli $d \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem skończonym,

~~oraz $d \to d$ jest bijekcją.~~

$\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest bijekcją, to

$$\omega\big|_{\mathbb{N} \setminus d} = id.$$

**Przykład.**




$$(d_1, \omega_1) \cdot (d_2, \omega_2) =$$

$$= (d_1 \cup d_2,\ \omega_1 \omega_2)$$

$$P_n = \left\{ (d, \omega) \ : \ \begin{array}{c} \text{częściowe permutacje} \\ d \subseteq [n] \end{array} \right\}$$

$\mathbb{C}[P_n]$ – algebra półgrupowa

Rozważmy np. $\boxed{\text{homomorfizm algebr.}}$

$$\varphi : \mathbb{C}[P_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_m]$$

$$(d, \omega) \longmapsto \begin{cases} \omega & \text{jeśli } d \subseteq \{1, \dots, m\} \\ 0 & \end{cases}$$

6 1/2

Chcemy odwrócić "forgetting map"?

Kłopot: dwa rodzaje fix-punktów,

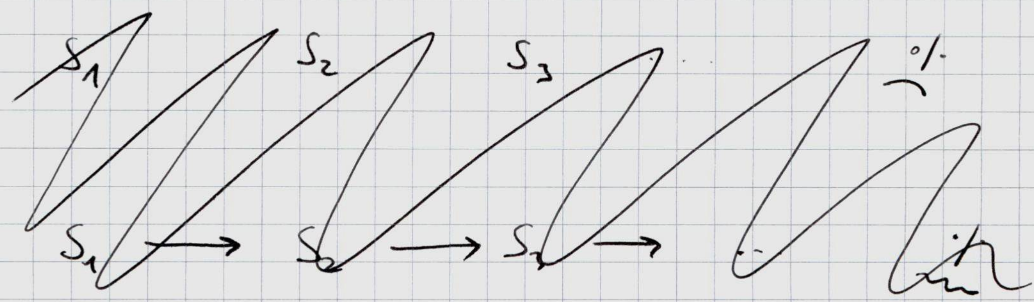
te z nośnika oraz te nie z nośnika.

"Cykliczna permutacja" to taka pamiętliwa permutacja

która pamięta swoją historię.

7

Dlaczego cykliczne permutacje są ładne?



$$\mathbb{C}[S_1] \longrightarrow \mathbb{C}[S_2] \longrightarrow \mathbb{C}[S_3]$$

$$Z\mathbb{C}[S_1] \quad \not\subset \quad Z\mathbb{C}[S_3]$$
$$Z\mathbb{C}[S_2]$$

---

$$\mathbb{C}[P_1] \leftarrow \mathbb{C}[P_2] \leftarrow \mathbb{C}[P_3] \leftarrow \dots$$

$$\mathbb{C}[P_1]^{S_1} \leftarrow \mathbb{C}[P_2]^{S_2} \leftarrow \mathbb{C}[P_3]^{S_3} \leftarrow$$

**granica odwrotna**

~~4~~ 8

"klasy sprzężoności"

$$A_{\varrho; n} = \sum_{\substack{|d| = |\varrho| \\ d \subseteq [1,..,n]}} (d, \omega) \in \mathbb{C}[\mathcal{P}_n]$$

$\omega|_d$ ma rozkład na cykle zadany przez $\varrho$.

identyfikuję podzbiór $\{P_n\}$ z sumą w $\mathbb{C}[P_n]$

Przykład.

$$A_{\emptyset; n} = (\emptyset, id) \qquad \varphi \mapsto id$$

$$A_{1; n} = \sum_i (\{i\}, id) \qquad \mapsto n \cdot id.$$

$$A_{2; n} = \sum_{i<j} (\{i,j\}, (i,j))$$

~~Forgetting map. $\varphi: \mathbb{C}[P_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$~~

~~$\varphi: A_{\varrho; n} \longmapsto \binom{m-|\varrho|}{m+m_1(\varrho)-|\varrho|} \underbrace{C_{\varrho, 1^{m-|\varrho|}}}$~~

~~te~~ permutacje mają $m + m_1(\varrho) - |\varrho|$ punktów stałych

8 $\frac{1}{2}$

forgetting map

$$\varphi: \mathbb{C}[P_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$$

$$\varphi: A_{\rho;n} \longmapsto \quad \times \; \underbrace{C_{\rho,1^{n-|\rho|}}}_{n-(|\rho|-m_1(\rho))}$$

punktów stałych.

~~$|\rho| - m_1(\rho)$ punktów niestałych~~

$$\binom{n-|\rho|+m_1(\rho)}{m_1(\rho)}$$

$$= \binom{n-|\rho|+m_1(\rho)}{m_1(\rho)} \quad C_{\rho;n}$$

z usuniętymi jedynkami

$S_n$ działa na $P_n$ przez "sprzęganie"

$$\pi(d, w) = (\pi(d), \pi w \pi^{-1})$$

orbity działania to "klasy sprzężoności w $P_n$",

to dokładnie $(A_{g;n})$ : $|g| \leq n$

Zamiast centrum algebry grupowej, patrzymy na

$$A_n := \mathbb{C}[P_n]^{S_n}$$

czyli $S_n$-niezmiennicze elementy $\mathbb{C}[P_n]$.

"funkcje stałe na klasach sprzężoności".

Bazą liniową $A_n$ jest $(A_{g;n})$ : $|g| \leq n$.

Tw. Dla $\pi, \lambda$

istnieją liczby całkowite

$$g^{\nu}_{\pi,\lambda} \quad : \quad |\nu| \leq |\pi| + |\lambda|$$

$\forall_n$

$$A_{\pi;n} \cdot A_{\lambda;n} = \sum_{|\nu| \leq |\pi| + |\lambda|} g^{\nu}_{\pi,\lambda} \, A_{\nu;n}.$$

---

Dowód.

Konstrukcja.

Niech $n \geq |\pi| + |\lambda|$.

$$A_{\pi;n} \cdot A_{\lambda;n} \in \mathbb{C}[P_n]^{S_n}$$

$$A_{\pi;n} \cdot A_{\lambda;n} = \sum_{\nu} g^{\nu}_{\pi,\lambda}(n) \, A_{\nu;n}$$

$\uparrow$

$|\nu| \leq |\pi| + |\lambda|.$

$10\frac{1}{2}$

PrylTal.

$$A_2 \cdot A_2 = 2\,A_{(2,2)} + 3\,A_3 + A_{1,1}$$

---

$$C_{2;n} \cdot C_{2;n} = 2\,C_{2,2;n} + 3\,C_{3;n} + \binom{n}{2} C_{\phi;n}$$

(11)

## Jednoznaczność

Dlaczego te stałe nie zależą od $n$?

$$n_1 \geq n_2 \geq |\pi| + |\lambda|$$

$$A_{\pi; n_1} \cdot A_{\lambda; n_2} = \sum_{\nu} g_{\pi,\lambda}^{\nu}(n_1)\, A_{\nu; n_1}$$

$\Downarrow$ forgetting map!

$$A_{\pi; n_2} \cdot A_{\lambda; n_2} = \sum_{\nu} g_{\pi,\lambda}^{\nu}(n_1)\, A_{\nu; n_2}$$

ale rozkład na elementy bazowe jest ~~róż~~ jednoznaczny!

$$g_{\pi,\lambda}^{\nu}(n_1) = g_{\pi,\lambda}^{\nu}(n_2)$$

**Alternatywny dowód.** ustalamy $(\delta, \omega) \in A_\nu$

$$g_{\pi,\lambda}^{\nu} = \#\left\{ (\delta_1, \omega_1), (\delta_2, \omega_2) : \begin{array}{l} (\delta_1,\omega_1) \cdot (\delta_2, \omega_2) = (\delta, \omega) \\ (\delta_1, \omega_1) \in A_\pi \\ (\delta_2, \omega_2) \in A_\lambda \end{array} \right\}$$