(1) 8 marca 2016

Przypomnienie z 1 marca.

Nasz cel:

zrozumieć ~~centra~~ algebry grupowej grup permutacji:

$$\mathbb{C}[S_n] = \longleftarrow ⚠ \text{ ze splotem!}$$

$$= \{ f : S_n \longrightarrow \mathbb{C} \}$$

a właściwie <u>centra</u> algebr grupowych:

$$Z\mathbb{C}[S_n] = \{ f \in \mathbb{C}[S_n] : \forall \tilde{f} \in \mathbb{C}[S_n] \quad f\,\tilde{f} = \tilde{f}\, f \}$$

$$= \{ f \in \mathbb{C}[S_n] : f : S_n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ jest funkcją stałą na każdej klasie sprzężoności} \}.$$

najlepiej w taki sposób, by granica $n \longrightarrow \infty$ nie stanowiła problemu.

~~Uwagi~~ Przypomnienie.

"znormalizowane klasy sprzężoności"

$$A_{\rho;n} = \sum_{(d,\omega)} \omega \in \mathbb{C}[S_n]$$

$d \subseteq \{1, \dots, n\}$

$|d| = |\rho|$

$\omega \in S_n$

$\omega|_{\{1,\dots,n\} \setminus d} = id$

$\omega|_d$ ma rozkład na cykle zadany przez ρ

tydzień temu $A_{\rho;n}$ traktowaliśmy jako sumę częściowych permutacji; teraz zapominamy o nośniku.

Przykład.

$$A_{\emptyset;n} = e = \delta_e \in \mathbb{C}[S_n]$$

$$A_{(1);n} = n \cdot e = n \cdot \delta_e \in \mathbb{C}[S_n]$$

$$A_{(2);n} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i,j) \in \mathbb{C}[S_n]$$

DAN-MARK

③

Przypomnienie.

Dlaczego $A_{g;n}$ są bliskie?

Tw Dla π, λ

istnieją liczby całkowite $g^{\nu}_{\pi,\lambda}$ które NIE zależą od n.

że

$$A_{\pi;n} \cdot A_{\lambda;n} = \sum_{\substack{\nu \\ |\nu| \leq |\pi| + |\lambda|}} g^{\nu}_{\pi,\lambda} A_{\nu;n}$$

4

Znormalizowane klasy spójności $\sum$

$$\sum_{g;n} = \sum \prod_i \left(f(i,1), f(i,2), \dots, f(i,g_i) \right)$$

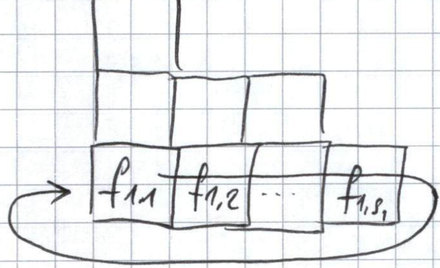
funkcje równowartościowe

$$f : \{ (i,j) \;:\; i \geq 1,\ 1 \leq j \leq g_i \} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

$$= \sum$$ "każdy wiersz to cykl"

wypełnienia równowartościowe

elementami $\{1, \dots, n\}$



$\leftarrow$ g_2 klatek

$\leftarrow$ g_1 klatek

każdy wiersz to cykl permutacji!

(5)

Przykład

$$\sum_{\phi;n} = (\text{jeden składnik, pusta funkcja}) =$$

$$= e$$

$$\sum_{1;n} = \sum_{\boxed{f_{1,1}}} (f_{1,1}) = n \cdot e$$

$$\sum_{(2);n} = \sum_{\boxed{f_{1,1}}\,\boxed{f_{1,2}}} (f_{1,1}, f_{1,2}) =$$

$$= \sum_{i \neq j} (i, j)$$

Fakt

$$\sum_{g;n} = A_{g;n} \cdot \underbrace{\prod_{i \geq 1} m_i(g)! \cdot i^{m_i(g)}}_{Z_g}$$

⑥ "Transformata Fouriera zamienia splot na mnożenie"

ogólny fakt!

tyle kopii ile partycji liczby n

$$\underbrace{Z\,\mathbb{C}[S_n]}_{} \cong \overbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{C} =$$

ale jak wygląda ten izomorfizm?

mnożenie = = splot

mnożenie = = mnożenie punktowe!

Hint:

tw. Artina-Wedderburna o półprostych algebrach

tw. Gelfanda-Najmarka

$= \{f : \mathbb{Y}_n \to \mathbb{C}\}$

funkcje na diagramach Younga

dla $\lambda \vdash n$ niech

$$\rho_\lambda : S_n \longrightarrow \mathcal{E}nd(V^\lambda)$$

$$\rho_\lambda : S_n \longrightarrow M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$$

będzie ~~repr~~ nieredukowalną reprezentacją grupy S_n

czyli (z grubsza) ρ_λ jest homomorfizmem grup:

$$\rho_\lambda(g_1 g_2) = \rho_\lambda(g_1) \cdot \rho_\lambda(g_2).$$

jeśli zamiast S_n wziąć skończoną grupę cykliczną, dostaniemy dyskretną transformatę Fouriera.

$$Z\,\mathbb{C}[S_n] \ni f \longmapsto \left(\lambda \mapsto \underbrace{\frac{1}{\dim V^\lambda} \operatorname{Tr} \rho_\lambda}_{\text{znormalizowany ślad}}(f) \right) =$$

$\lambda \mapsto \dots$

funkcja na diagramach Younga

$$= \left(\lambda \mapsto \sum_{g \in S_n} \underbrace{\left[\frac{1}{\dim V^\lambda} \operatorname{Tr} \rho_\lambda(g) \right]}_{\text{charakter}} f(g) \right)$$

$\boxed{\text{TO JEST IZOMORFIZM ALGEBR}}$

7

$\boxed{\text{Przykład:}}$

$$Z\,\mathbb{C}[S_n] \ni \Sigma_{\rho;n} \longmapsto Ch_\rho$$

$$Ch_\rho(\lambda) = \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{\dim V^\lambda} \operatorname{Tr} \rho_\lambda(\overbrace{\rho, 1^{n-|\rho|}}^{\text{permutacja}})}_{\text{charakter}} \times n(n-1)\cdots(n-|\rho|+1) & \lambda \vdash n, \quad \text{dla } n \geq |\rho| \\ 0 & \lambda \vdash n, \quad \text{dla } n < |\rho| \end{cases}$$

Sztuczka leningradzka:

nie patrz na S_n osobno.

Popatrz na nie wszystkie naraz!

Nie patrz na $\Sigma_{\rho;n}$ osobno dla każdego n!

Nie patrz na Ch_ρ jako na funkcję diagramów Younga o ustalonej liczbie klatek n!

8

$\boxed{\text{Przykład.}}$

$$Ch_\emptyset(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = 1$$

$$Ch_{(1)}(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) =$$

$$= \lambda_1 + \dots + \lambda_\ell =$$

$$= (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 2) + \dots + (\lambda_\ell - \ell)$$
$$+ 1 + 2 + \dots + \ell$$

$$Ch_{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) =$$

$$= \lambda_1^2 - \lambda_1 + \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + \dots + \lambda_\ell^2 - (2\ell-1)\lambda_\ell$$

$$= (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 2)^2 + \dots + (\lambda_\ell - \ell)^2 +$$

$$+ (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 2) + \dots + (\lambda_\ell - \ell) -$$

$$- \left[1^2 + 2^2 + \dots + \ell^2 \right]$$

$$+ \left[1 + 2 + \dots + \ell \right]$$

Definicja

~~Twierdzenie~~.

$F : \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ jest funkcją przesuniętą-symetryczną, ~~jeśli~~ stopnia N jeśli

~~dla~~ ~~takiego, że~~ $\forall_\ell$ istnieje wielomian

symetryczny $P_\ell(\cancel{x_1, \dots}\ s_1, s_2, \dots, s_\ell)$ stopnia co najwyżej N

taki, że $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{Y}$

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = P_\ell(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots, \lambda_\ell - \ell)$$

czyli

F jest symetryczną funkcją zmiennych $s_1 = \lambda_1 - 1$,
$s_2 = \lambda_2 - 2$

Hint: czyli taka funkcja F to tyle samo, co ciąg wielomianów ~~s~~ symetrycznych $P_1, P_2, \dots$ t.ż. $P_{\ell+1}(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \cancel{\dots}, 0 - (\ell+1)) = P_\ell(\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_\ell - \ell)$

Twierdzenie

Ch_g jest jedyną funkcją ~~przesuniętą-symetryczną~~ F taką, że

(i) F jest przesunięta-symetryczna stopnia $|g|$

(ii) jednorodna część stopnia $|g|$ wielomianu P_ℓ wynosi

~~$P_\ell(s_1, \dots)$~~ $\prod_i \sum_j s_j^{g_i}$

(iii) $F(\lambda) = 0$ jeśli $\lambda \in \mathbb{Y}$, $|\lambda| < |g|$.