① 15 marca

Przypomnienie.

Znormalizowane klasy sprzężoności

$$\Sigma_{\pi;n} = \sum \underbrace{(f_{1,1},\dots,f_{1,\pi_1})(f_{2,1},\dots,f_{2,\pi_2})\cdots}_{\text{każdy wiersz wypełnienia interpretujemy jako cykl permutacji}} \in \mathbb{C}[S_n]$$

$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	f_{2,π_2}		$\leftarrow$ π_2 klatek
$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$\cdots$	f_{1,π_1}	$\leftarrow$ π_1 klatek

SUMOWANIE PO RÓŻNOWARTOŚCIOWYCH wypełnieniach elementami z $\{1,\dots,n\}$.

Po co? np. dużo zbadać

Izomorfizm:

$$Z\,\mathbb{C}[S_n] \simeq \{ f : \mathbb{Y}_n \to \mathbb{C} \}$$

$$Z\,\mathbb{C}[S_n] \ni X \longmapsto f \qquad \boxed{f(\lambda) = \frac{1}{\dim \rho_\lambda} \cdot \operatorname{Tr} \rho_\lambda(x)}$$

$$\Sigma_{\pi;n} \longmapsto Ch_\pi$$

Partycja $|\pi|, 1, \ldots, 1$ zadaje pełną klasę sprzężoności w S_n; wybieramy dowolną permutację z tej klasy

$$Ch_\pi(\lambda) = \begin{cases} 0 & |\lambda| < |\pi| \\ \underbrace{|\lambda|^{\underline{|\pi|}}}_{\text{symbol Pochhammera}} \dfrac{\operatorname{Tr} \rho_\lambda(\pi, 1, \ldots, 1)}{\text{wymiar reprezentacji } \rho_\lambda} & \end{cases}$$

$$= \cancel{}\ (|\lambda|)_{|\pi|}$$

nieredukowalna reprezentacja odpowiadająca λ.

Formalnie rzecz biorąc, w tym izomorfizmie

$$\Sigma_{\pi;n} \longmapsto \underbrace{Ch_\pi \big|_{\mathbb{Y}_n}}_{\text{obcięcie } Ch_n \text{ do diagramów o } n \text{ klatkach.}}$$

Ale jeśli się nie zrobi tego obcięcia, można badać grupy S_n wszystkie naraz

3

Problem nie tylko na dziś:

$$Ch_{\pi} = ?$$

Możliwych jest wiele odpowiedzi w różnych językach.

Po co?

Problem splotu w $Z\,\mathbb{C}[S_n]$:

$$\Sigma_{\pi;n} \cdot \Sigma_{\sigma;n} = \sum_{\nu} \underbrace{c^{\nu}_{\pi\sigma}}_{=?} \Sigma_{\nu;n}$$

$$\Updownarrow$$

$$Ch_{\pi} \cdot Ch_{\sigma} = \sum_{\nu} c^{\nu}_{\pi\sigma} \, Ch_{\nu}.$$

Elementy Jucysia-Murphy'ego:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{C}[S_n]$$

$$X_1 = 0 \qquad !$$

$$X_2 = (1,2)$$

$$X_3 = (1,3)+(2,3)$$

$$\vdots$$

$$X_n = (1,n)+(2,n)+\dots+(n-1,n).$$

Fakty

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ komutują.
- jeśli $p(x_1,\dots,x_n)$ jest wielomianem symetrycznym, to
  $p(X_1, \dots, X_n) \in Z\mathbb{C}[S_n]$
- każdy element $Z\mathbb{C}[S_n]$ jest takiej postaci.

Fakty, cd.

- jeżeli $|\lambda| = n$ to

$$Z\,\mathbb{C}[S_n] \ni p(X_1, \dots, X_n) \xmapsto{\text{izomorfizm}} f$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\dim \rho_\lambda} \operatorname{Tr} \rho_\lambda \left(p(X_1, \dots, X_n) \right)$$

$$= p(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$c_1, \dots, c_n$ to multiset CONTENTÓW λ.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
-2 & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-3}
-1 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

$(c_1, \dots, c_n) =$
$= (-2, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 3)$.

6.

Przykład.

- $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$

$$p(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i<j} (i,j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (i,j) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum 1_{2^i n}$$

$$p(X_1, \dots, X_n) \longmapsto f = \frac{1}{2} Ch_2$$

$$f(\lambda) = c_1 + c_2 + \dots + c_n =$$

$$= \sum_{\substack{i \\ \text{suma po} \\ \text{wierszach}}} \underbrace{\sum_{1 \leq j \leq \lambda_i} (j-i)}_{\lambda_i \cdot \frac{(1-i)+(\lambda_i - i)}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum \Big[(\lambda_i - i)(1-i) + (\lambda_i - i)^2 + \\ + i(1-i) + i(\lambda_i - i) \Big] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum \Big[(\lambda_i - i) + (\lambda_i - i)^2 + i - i^2 \Big].$$

7

$\boxed{\text{Przykład 2}}$

$$p(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$p(X_1,\dots,X_n) = \sum_k \underbrace{\Big(\sum_{i<k} (i,k)\Big)}_{X_k} \underbrace{\Big(\sum_{j<k} (j,k)\Big)}_{X_k} =$$

$$= \text{"kolizje"} \left\{ \; i=j \quad \sum_{i<k} \underbrace{(i,k)\,(i,k)}_{id} \; + \right\} \frac{1}{2} \cdot \Sigma_{1,1;n}$$

$$+ \text{"brak kolizji"} \left\{ \begin{array}{l} i<j \quad \displaystyle\sum_{i<j<k} \underbrace{(i,k)\,(j,k)}_{(k,j,i)} \; + \\[2em] i>j \quad \displaystyle\sum_{\substack{j<i<k \\ i'<j'<k}} \underbrace{(i,k)\,(j,k)}_{\underline{(k,j,i)}} \\ \qquad\qquad\qquad\quad (k,i',j') \end{array} \right\}$$

suma wszystkich cykli długości trzy,

$$= \frac{1}{3} \Sigma_{3;n}$$

8

Problem 2, cont.

$$\frac{1}{2}\, Ch_{1,1} + \frac{1}{3}\, Ch_3 =$$

$$= \sum_i c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 =$$

$$= \sum_i \sum_{1 \le j \le \lambda_i} (i-j)^2 = \dots$$

$\boxed{\text{Moral}}$

$$\sum c_i^* = \sum_{\square \in \lambda} c(\square) = \frac{1}{2} Ch_2(\lambda)$$

$$\sum_{\square \in \lambda} c(\square)^2 = \frac{1}{3} Ch_3 + \frac{1}{2} Ch_{1,1}$$

$$\left(\sum_{\square \in \lambda} c(\square) \right)^2 = \frac{1}{4} Ch_{2,2}^* + \dots$$

$$Ch_2 = 2 \sum_{\square \in \lambda} c(\square)$$

$$Ch_3 = 3 \sum c(\square)^2 - \frac{3}{2} \underbrace{Ch_{1,1}}_{\sum_{\substack{\square_1, \square_2 \\ \square_1 \neq \square_2}} c(\square_1)^0 \cdot c(\square_2)^0}$$

9

Pmkita 3

$$p(x_1, \dots, x_n) = \cancel{\sum_{i<j} x_i x_j} \quad \left(\sum x_i\right)^2$$

$$p(X_1, \dots, X_n) = \underbrace{\sum_{i>k} (i,k)}_{X_i} \; \underbrace{\sum_{j>l} (j,l)}_{X_j} =$$

$$= \begin{cases} l=j \\ k=l \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} i=j \\ k<l \end{cases}$$

$$+ \quad \vdots$$

"4 kolicje"

brat kolicij...

$$+ \sum_{\substack{i>k \\ j>l}}$$

$$\{i,k\} \cap \{j,l\} = \emptyset$$

$$\frac{1}{4} \sum_{2,2;n}$$

10

Moral lesson

- ~~jeśli $p(x_1, \dots, x_n)$ jest wielomianem symetrycznym~~

jeśli p jest dowolną <u>funkcją symetryczną</u>,
(a nawet ciągłą ograniczoną!)

np.

$$p_\pi(x_1, \dots, x_n) = \prod_i x_1^{\pi_i} + \dots + x_n^{\pi_i}$$

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\ell)$

$\pi_1, \dots, \pi_\ell \geq 0$

$\uparrow$

zero jest ok!

to istnieją takie stałe c_ν, że

$$\forall_n \quad p(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\sum_\nu c_\nu \cdot \Sigma_{\nu, n}}_{\text{skończona suma}}$$

-

$$(1+tX_1)(1+tX_2)(1+tX_3)\cdots(1+tX_n) =$$

$$= \sum_k t^k \, e_k(X_1, \ldots, X_n) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} t^{|\sigma|} \quad \sigma$$

DAN-MARK