

1

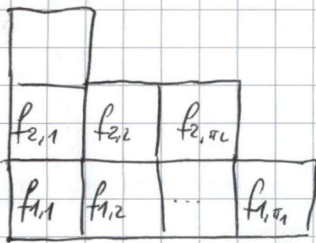
15 marca

Przypomnienie

Znamaktywane układy sprzeczności

$$\sum_{\pi \in S_n} (f_{\pi_1, 1}, \dots, f_{\pi_1, \pi_1}) (f_{\pi_2, 1}, \dots, f_{\pi_2, \pi_2}) \dots \in \mathbb{C}[S_n]$$

każdy wiersz wypełnienia interpretujemy jako cykl permutacji



← π_2 wotek

← π_1 wotek

SAMOWANIE PO ROZMIAROWANCIOWYCH
wypełnieniach elementarnych z $\{1, \dots, n\}$.

2

po co? np.
dla obatai

izomorfizm:

$$\mathbb{Z}[\mathbb{C}[S_n]] = \{f: \Sigma_n \rightarrow \mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{Z}[\mathbb{C}[S_n] \ni X \mapsto f$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\dim \rho_\lambda} \cdot \text{Tr } \rho_\lambda(x)$$

$$\Sigma_{\pi, n}$$

$$\mapsto$$

$$\text{Ch}_\pi$$

Partycja

$|\pi|, 1, \dots, 1$ zadaje pełną klasę spinnacji w S_n ; wybieramy dowolną permutację z tej klasy

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \begin{cases} 0 & |\lambda| < |\pi| \\ |\lambda|^{|\pi|} & |\lambda| \geq |\pi| \end{cases} \cdot \frac{\text{Tr } \hat{\rho}_\lambda(\pi, 1, \dots, 1)}{\dim \rho_\lambda}$$

symbol Pochhammer =

$$= \prod_{i=0}^{|\lambda|-1} (|\lambda| - i)$$

wymiar reprezentacji ρ_λ

nierozkładalną reprezentacją odpowiadającą λ .

Formalne nasz biorąc, w tym izomorfizmie

$$\Sigma_{\pi, n} \mapsto \text{Ch}_\pi | \Sigma_n$$

obcisnąć Ch_π do diagonalii o n

właściwości.

Ale jeśli się nie zrobi tego obcisnięcia, można badać

grupy S_n w innych ujęciach

3

Problem nie tylko na dziś:

$$Ch_{\pi} = ?$$

Możliwych jest wiele odpowiedzi w różnych przypadkach.

Po co?

Problem zdefiniowany w $Z\mathbb{C}[S_n]$:

$$\sum_{\pi \in n} \sum_{\sigma \in n} = \sum_{\nu} \underbrace{c_{\pi\sigma}}_{=?} \sum_{\nu \in n}$$



$$Ch_{\pi} \cdot Ch_{\sigma} = \sum_{\nu} c_{\pi\sigma} Ch_{\nu}$$

④

Elementy Jucyja - Murphy'ego:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{C}[S_n]$$

$$X_1 = 0 \quad \text{!}$$

$$X_2 = (1, 2)$$

$$X_3 = (1, 3) + (2, 3)$$

⋮

$$X_n = (1, n) + (2, n) + \dots + (n-1, n)$$

Fakty

- X_1, X_2, \dots, X_n komutuju.
- jeil' $\mathcal{P}(X_1, \dots, X_n)$ jeit wieloniacem symetrycznym, to $\mathcal{P}(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{Z}[\mathbb{C}[S_n]]$
- kaizdy element $Z \in \mathbb{C}[S_n]$ jeit talozj partii.

5

Faluty, 1.

- jeżeli $|X| = n$ to
izomorfizm

$$Z([S_n]) \xrightarrow{\text{izom.}} P(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{\text{izom.}} f$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\dim S_\lambda} \cdot \text{Tr } S_\lambda (p(X_1, \dots, X_n))$$
$$= p(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

c_1, \dots, c_n to multiset CONTENTÓW λ

-2			
-1	0	1	
0	1	2	3

$$(c_1, \dots, c_n) =$$
$$= (-2, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 3)$$

6.

Przykład.

• $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} (i, j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (i, j) = \frac{1}{2} \sum_{i, j \in n} (i, j)$$

$$p(x_1, \dots, x_n) \mapsto f = \frac{1}{2} Ch_2$$

$$f(\lambda) = c_1 + c_2 + \dots + c_n =$$

$$= \sum_i \underbrace{\sum_{1 \leq j \leq \lambda_i} (j-i)}_{\substack{\text{suma po} \\ \text{wierszach}}} = \sum_i \lambda_i \cdot \frac{(1-i) + (\lambda_i - i)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\lambda_i - i) \underbrace{(1-i)} + (\lambda_i - i)^2 + i \underbrace{(1-i)} + i(\lambda_i - i) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\lambda_i - i) + (\lambda_i - i)^2 + i - i^2 \right]$$

7

Paragraf 2

$$P(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i < k} (i, k) \right) \left(\sum_{j < k} (j, k) \right) =$$

"holiya"

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i < k} \underbrace{(i, k) (i, k)}_{id.} + \frac{1}{2} \sum_{i, j, k} \end{aligned} \right\}$$

"bosh holisi"

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i < j} \underbrace{(i, k) (j, k)}_{(k, j, i)} + \sum_{\substack{j < i < k \\ i' < j' < k}} \underbrace{(i, k) (j, k)}_{(k, j', i')} \underbrace{(k, j, i)}_{(k, i', j')} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{Juma ushbu ushbu ushbu} \\ & \text{shartlari tuz,} \\ & = \frac{1}{3} \sum_{i, j, k} \end{aligned}$$

8

Problem 2, a)

$$\frac{1}{2} Ch_{1,1} + \frac{1}{3} Ch_3 =$$

$$= \sum_i c_i^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 =$$

$$= \sum_i \sum_{1 \leq j \leq i} (i-j)^2 = \dots$$

Moral:

$$\sum_{\Omega \in \mathcal{A}} c(\Omega) = \frac{1}{2} Ch_2(\lambda)$$

$$\sum_{\Omega \in \mathcal{A}} c(\Omega)^2 = \frac{1}{3} Ch_3 + \frac{1}{2} Ch_{1,1}$$

$$\left(\sum_{\Omega \in \mathcal{A}} c(\Omega) \right)^2 = \frac{1}{4} Ch_{2,2} + \dots$$

$$Ch_2 = 2 \sum_{\Omega \in \mathcal{A}} c(\Omega)$$

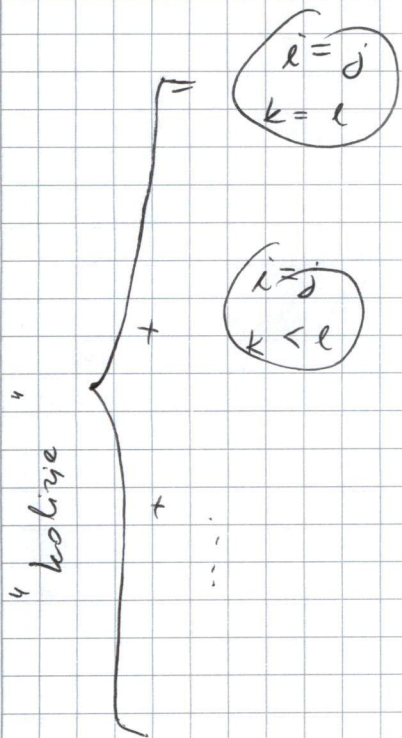
$$Ch_3 = 3 \sum_{\Omega \in \mathcal{A}} c(\Omega)^2 - \frac{3}{2} \underbrace{Ch_{1,1}}_{\sum_{\substack{\Omega_1, \Omega_2 \\ \Omega_1 \neq \Omega_2}} c(\Omega_1) \cdot c(\Omega_2)}$$

9

Problem 3

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i < j} \cancel{x_i x_j} \left(\sum x_i \right)^2$$

$$P(X_1, \dots, X_n) = \underbrace{\sum_{i > k} (i, k)}_{X_i} \underbrace{\sum_{j > l} (j, l)}_{X_j} =$$



brak (i, k) i (j, l) ...
 $\sum_{\substack{i > k \\ j > l}} \dots$
 $\{(i, k) \cap (j, l)\} = \emptyset$

$$\left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} \frac{1}{4} \sum_{2,2; n}$$

Moral lesson

• jeżeli $p(x_1, \dots, x_n)$ jest wielomianem symetrycznym

jeżeli p jest dowolną funkcją symetryczną,
(a nawet czynniki rozkładają się!)

np.

$$P_{\pi}(x_1, \dots, x_n) = \prod_i x_1^{\pi_i} + \dots + x_n^{\pi_i}$$

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$

to istnieją takie stałe c_{ν} , że $\pi_1, \dots, \pi_n \geq 0$

$\forall n$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu} c_{\nu} \sum_{i \in \nu} x_i$$

↑
żeby
jechać dalej

skorzystał z sumy

$$(1+tX_1)(1+tX_2)(1+tX_3)\cdots(1+tX_n) =$$

$$= \sum_k t^k e_k(X_1, \dots, X_n) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} t^{|\sigma|} \sigma$$