Kombinatoryka i interakcje – zadania

Niech $\rho : S_n \to \mathrm{End}(V)$ będzie reprezentacją, której rozkładem na składniki nieprzywiedlne jest $\rho = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} m^\lambda \rho^\lambda$, gdzie $\mathbb{Y}_n$ jest zbiorem diagramów Younga o n klatkach.

Zadanie 1. *Wyposażmy zbiór $\mathbb{Y}_n$ w miarę probabilistyczną $\mathbb{P}(\lambda) := \frac{m^\lambda \dim(\rho^\lambda)}{\dim(\rho)}$. Wówczas na algebrze $\mathcal{A}_1 := \{F : \mathbb{Y}_n \to \mathbb{C}\}$ można wprowadzić funkcjonał $\mathbb{E}_1$, który jest po prostu całkowaniem względem miary $\mathbb{P}$. Z drugiej strony, rozważmy algebrę $\mathcal{A}_2 := \mathrm{Z}(\mathbb{C}[S_n])$ i zdefiniujmy na niej funkcjonał $\mathbb{E}_2(f) := \operatorname{tr} \rho(f)$, gdzie ρ traktujemy jako kanoniczne liniowe rozszerzenie na $\mathbb{C}[S_n]$. Rozważmy odwzorowanie $\widehat{\ } : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ dane jako $\widehat{f}(\lambda) = \operatorname{tr} \rho^\lambda(f)$. Sprawdź, że to odwzorowanie jest izomorfizmem algebr oraz znajdź wzór na izomorfizm odwrotny.*

Zadanie 2. *Sprawdź, że izomorfizm z poprzedniego zadania zachowuje wartość oczekiwaną, czyli $\mathbb{E}_1(\widehat{f}) = \mathbb{E}_2(f)$. Co więcej, uzasadnij, że jeśli π jest partycją zbioru $\{1, \dots, k\}$ (k może być dowolne), to $\widehat{\Sigma_\pi^{(n)}} = \mathrm{Ch}_\pi$, gdzie Σ_π jest unormowaną klasą sprzężoności, natomiast Ch_π jest unormowanym charakterem.*

Zadanie 3. *Potraktujmy teraz $\Sigma_\pi^{(n)}$ jako element algebry półgrupowej $\mathbb{C}[P_n]$, gdzie P_n jest półgrupą częściowych permutacji. Niech $\Sigma_\pi := \varprojlim \Sigma_\pi^{(n)}$ będzie elementem granicy odwrotnej $\varprojlim \mathbb{C}[P_n]$. Sprawdź, że zbiór $\{\Sigma_\pi : \pi \text{ jest partycją}\}$ jest liniowo niezależny oraz udowodnij, że zbiór $\mathcal{A} := \mathrm{span}\{\Sigma_\pi : \pi \text{ jest partycją}\}$ jest algebrą.*

Zadanie 4. *Niech $\mathbb{Y}$ będzie zbiorem wszystkich diagramów Younga. Rozważmy podprzestrzeń $\mathcal{A} := \mathrm{span}\{\mathrm{Ch}_\pi : \pi \text{ jest partycją}\}$ przestrzeni funkcji $C(\mathbb{Y})$. Uzasadnij, że elementy Ch_π są liniowo niezależne oraz przestrzeń $\mathcal{A}$ jest algebrą.*