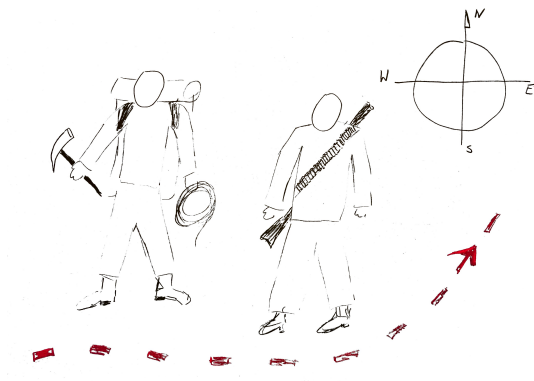


zaproszenie do kombinatoryki asymptotycznej

Piotr Śniady

IMPAN Toruń



LIS
00

RSK
00000

kształt graniczny
0000

rozkład graniczny
000

reprezentacje
0000000

the end
000



Stanisław Ulam



Donald E. Knuth

zdjęcia → Wikimedia

LIS = Longest Increasing Subsequence

23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41

jaka jest długość **najdłuższego podciągu rosnącego?**

LIS = Longest Increasing Subsequence

23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41

jaka jest długość najdłuższego podciągu rosnącego?

LIS = Longest Increasing Subsequence

23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41

jaka jest długość najdłuższego podciągu rosnącego?

LIS = Longest Increasing Subsequence

23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41

jaka jest długość **najdłuższego podciągu rosnącego**?

$$\text{LIS}(23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41) = 4$$

LIS = Longest Increasing Subsequence

23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41

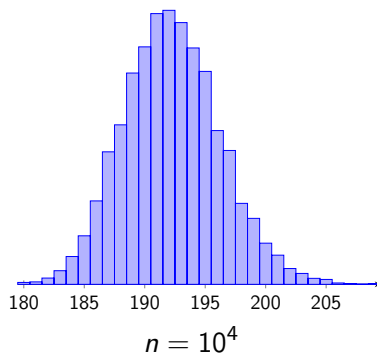
jaka jest długość **najdłuższego podciągu rosnącego**?

$$\text{LIS}(23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41) = 4$$

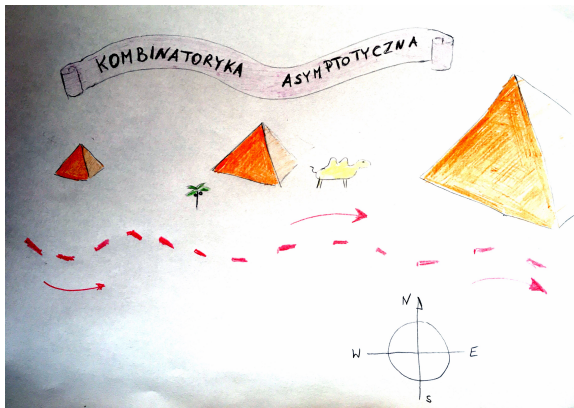
problem Stanisława Ulama

niech π_n oznacza losową permutację liter $1, 2, \dots, n$

co można powiedzieć o zmiennej losowej $\text{LIS}(\pi_n)$ w granicy $n \rightarrow \infty$?



mały morał



kombinatoryka
asymptotyczna:

co można
powiedzieć
o (losowych)
obiektach
kombinatorycznych
w granicy,
gdy stają się bardzo
duże?

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha jest bijekcją...

wejście:

- ciąg $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$

wyjście:

- semistandardowe tableau P ,
- standardowe tableau Q ,

P i Q mają ten sam kształt
złożony z n klatek

przykład:

$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

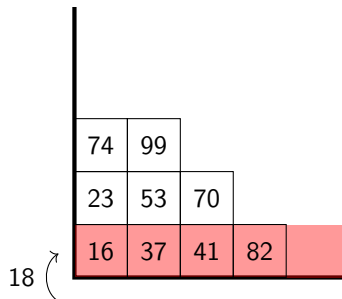
insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

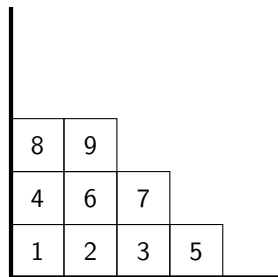
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



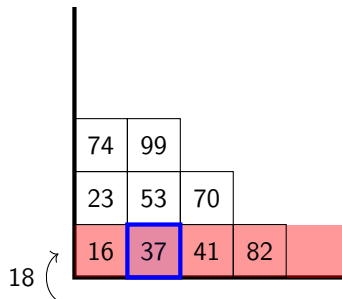
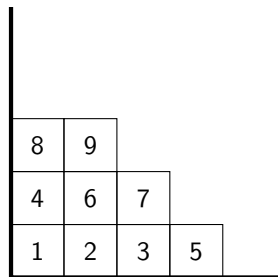
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



recording tableau $Q(\mathbf{w})$

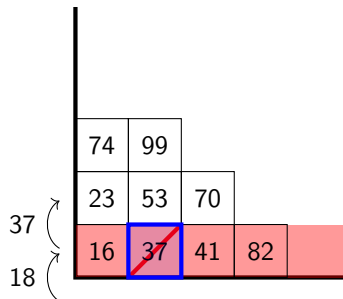
$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

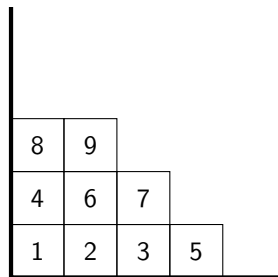
insertion tableau $P(w)$ recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



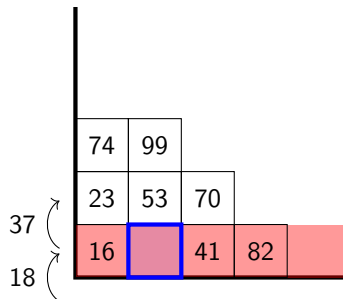
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



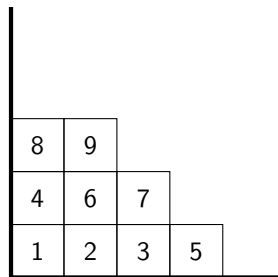
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



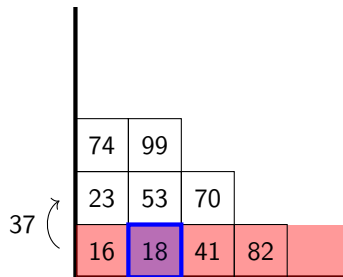
insertion tableau $P(w)$



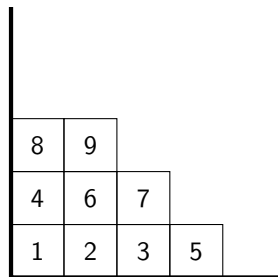
recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



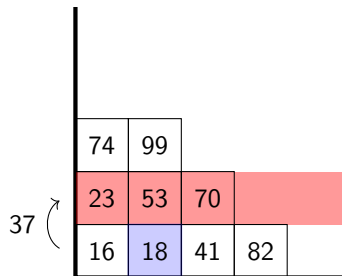
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



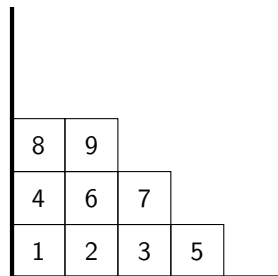
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



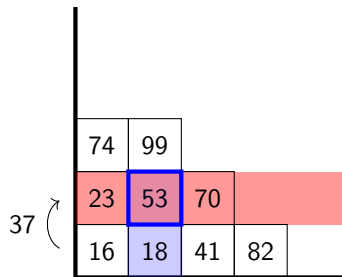
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



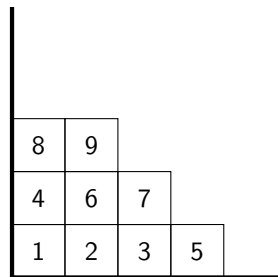
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



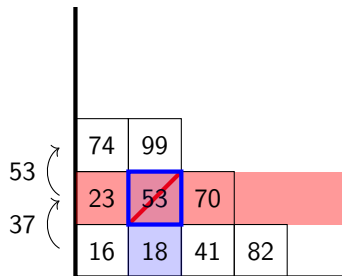
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



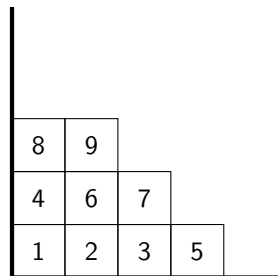
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



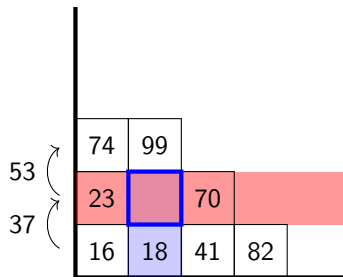
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



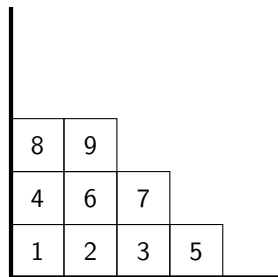
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



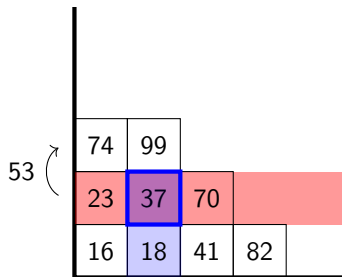
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



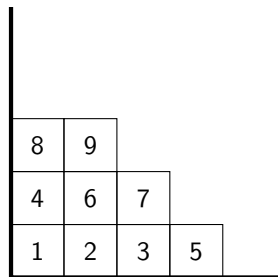
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



insertion tableau $P(\mathbf{w})$



recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

53 ↗

74	99		
23	37	70	
16	18	41	82

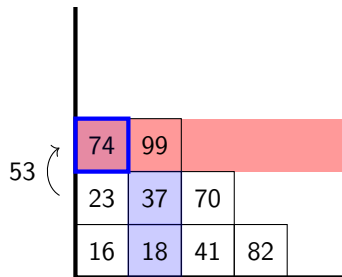
insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

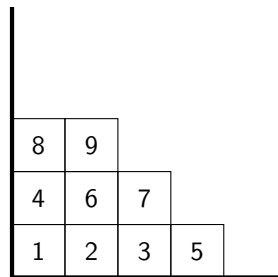
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



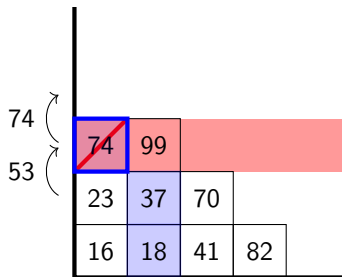
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



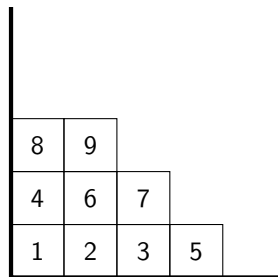
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



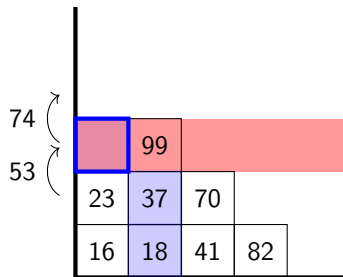
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



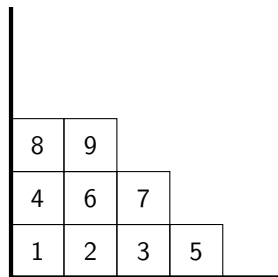
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



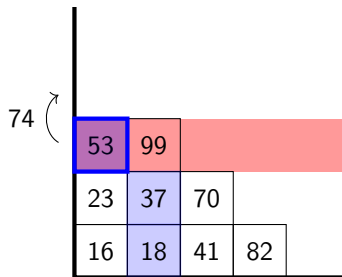
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



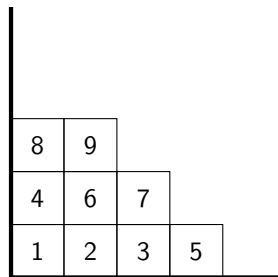
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



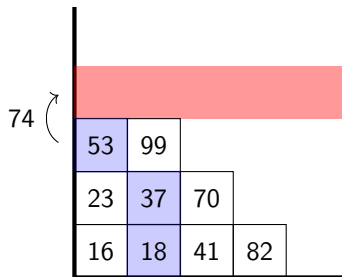
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



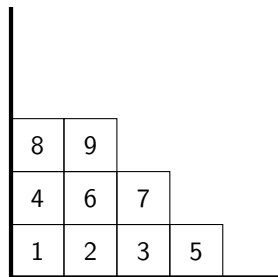
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



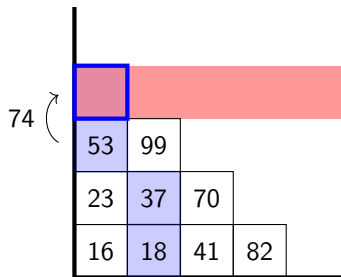
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



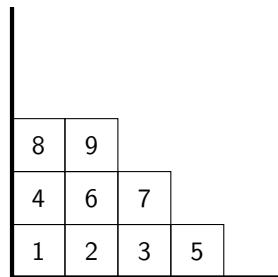
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



insertion tableau $P(\mathbf{w})$



recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74			
53	99			
23	37	70		
16	18	41	82	

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9			
4	6	7		
1	2	3	5	

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

nowa klatka

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

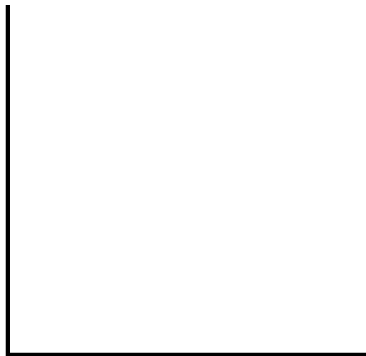
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



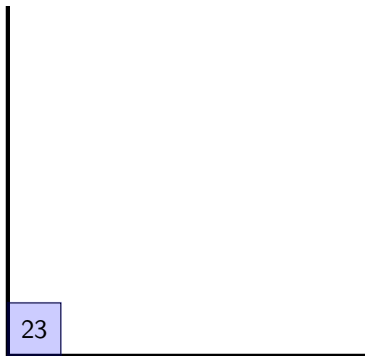
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



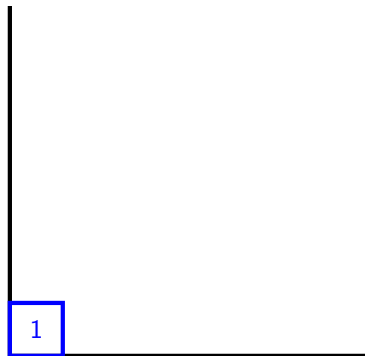
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = \emptyset$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



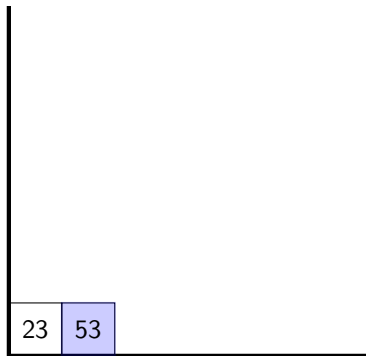
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



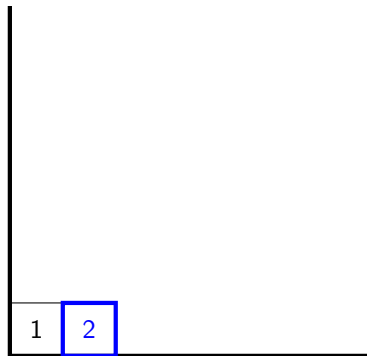
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



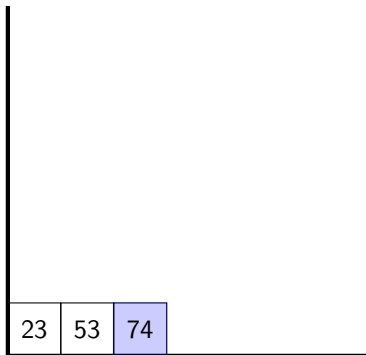
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



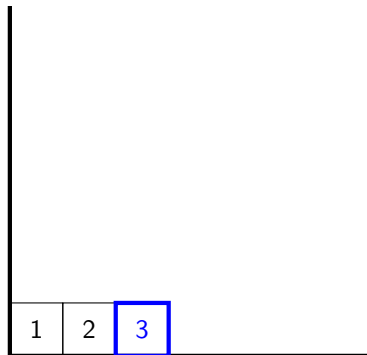
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



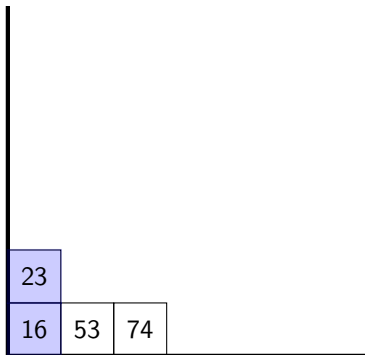
insertion tableau $P(\mathbf{w})$



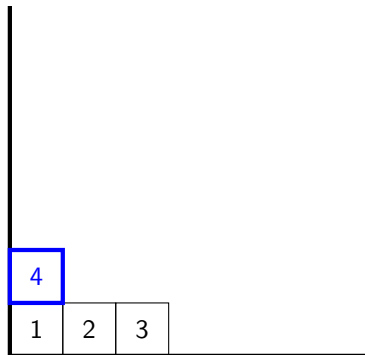
recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



insertion tableau $P(\mathbf{w})$



recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

23			
16	53	74	99

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

4			
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

23	74		
16	53	70	99

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

4	6		
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

23	74	99	
16	53	70	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
23	53	99	
16	37	70	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8			
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53	99		
23	37	70	
16	34	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53	99		
23	37	70	82
16	34	41	73

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

10			
8	9		
4	6	7	11
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34, 73)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53			
23	99		
16	37	70	82
2	34	41	73

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

12			
10			
8	9		
4	6	7	11
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34, 73, 2)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74				
53	99			
23	37			
16	34	70	82	
2	24	41	73	

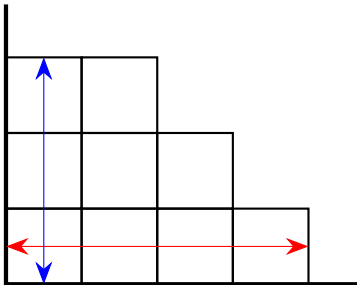
insertion tableau $P(\mathbf{w})$

12				
10	13			
8	9			
4	6	7	11	
1	2	3	5	

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

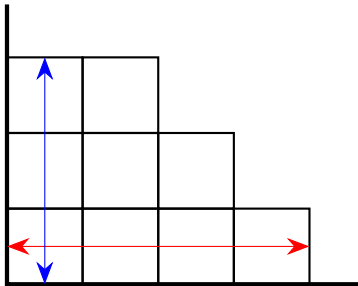
$$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34, 73, 2, 24)$$

długość pierwszej kolumny = długość najdłuższego podciągu malejącego



długość pierwszego wiersza
=
długość najdłuższego
podciągu rosnącego

długość pierwszej kolumny = długość najdłuższego podciągu malejącego



długość pierwszej wiersza
=
długość najdłuższego
podciągu rosnącego

na jakie zabawne pytanie
dotyczące
podciągów rosnących
odpowiedź brzmi:
*„łączna długość
pierwszych dwóch wierszy”?*

jeśli permutacji π
odpowiada para tableau (P, Q)
to jakie tableau
odpowiadają
permutacji odwrotnej π^{-1} ?

mały morał



kombinatoryka
algebraiczna:

- magiczne
bijeckcje,
- ... ,

chcesz więcej?

- →
Viennot's
geometric
construction,
- ... ,

problem Ulama, na sterydach

niech π_n oznacza losową permutację liter $1, 2, \dots, n$;

co można powiedzieć o **kształcie** tableau $P(\pi_n)$ oraz $Q(\pi_n)$ w granicy $n \rightarrow \infty$?



problem Ulama, na sterydach

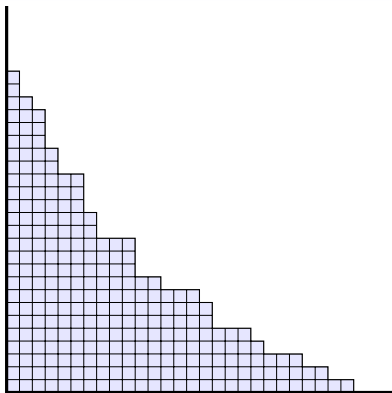
niech π_n oznacza losową permutację liter $1, 2, \dots, n$;

co można powiedzieć o **kształcie** tableau $P(\pi_n)$ oraz $Q(\pi_n)$ w granicy $n \rightarrow \infty$?

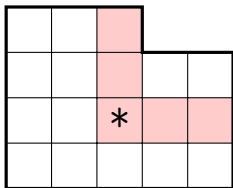
jeśli λ to diagram o n kłatkach, jego prawdopodobieństwo wynosi

$$\mathbb{P}(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!},$$

gdzie f^λ to liczba standardowych tableau o kształcie λ



hook-length formula



jeśli λ to diagram o n klatkach,
liczba standardowych tableau o
tym kształcie wynosi

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} h_{\square}}$$

$$h_* = 5$$

Dalsze kroki:

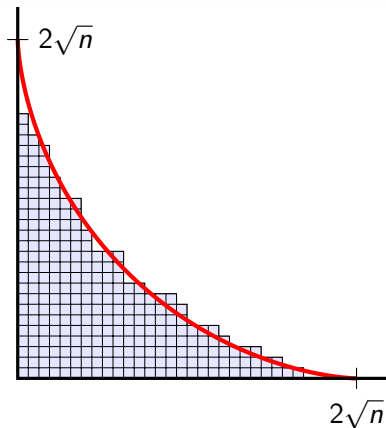
- logarytm zamienia iloczyn na sumę,
- suma może być przybliżona przez (podwójną) całkę,
- rachunek wariacyjny jest naszym przyjacielem

problem Ulama, na sterydach

niech π_n oznacza losową permutację liter $1, 2, \dots, n$;

co można powiedzieć o kształcie tableau $P(\pi_n)$ oraz $Q(\pi_n)$ w granicy $n \rightarrow \infty$?

tak, istnieje kształt graniczny!
LOGAN&SHEPP,
VERSHIK&KEROV 1977



mały morał

kombinatoryka algebraiczna:

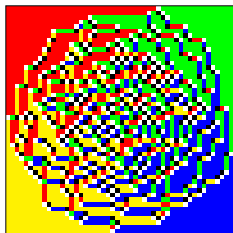
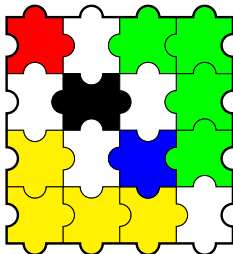
- zliczanie obiektów,
magiczne wzory, . . . ,
-

kombinatoryka asymptotyczna:

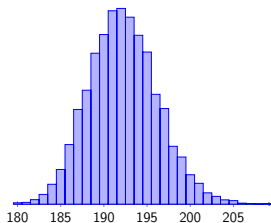
- czy istnieje kształt graniczny
interesujących nas skończonych
obiektów kombinatorycznych?
 - . . . ,
-

więcej pięknych widoczek:

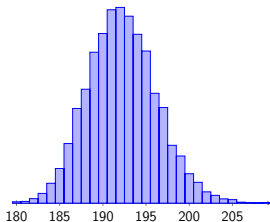
- → Alternating Sign Matrices,
- → Aztec domino,
- . . . ,



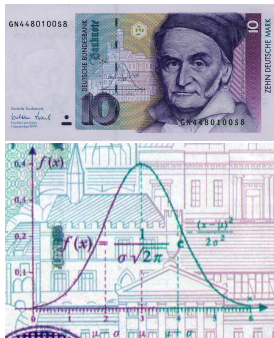
S. Ulam:
Longest Increasing
Subsequence
jaki ma rozkład
graniczny?



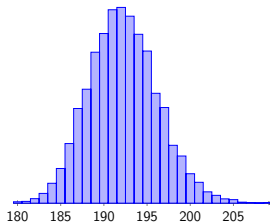
S. Ulam:
Longest Increasing
Subsequence
jaki ma rozkład
graniczny?



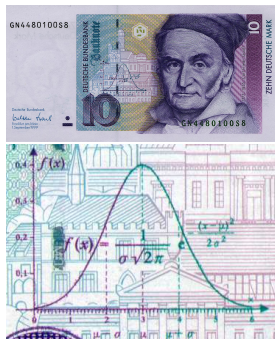
może rozkład Gaussa?



S. Ulam:
Longest Increasing
Subsequence
jaki ma rozkład
graniczny?

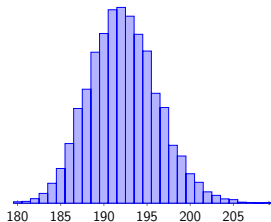


może rozkład Gaussa?

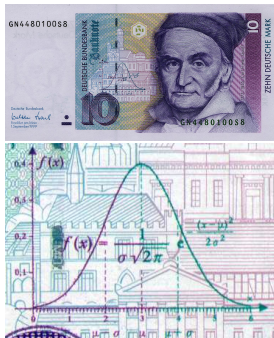


jednak NIE

S. Ulam:
Longest Increasing
Subsequence
jaki ma rozkład
graniczny?



może rozkład Gaussa?



jednak NIE

niespodzianka:
to jest
rozkład
Tracy'ego-Widoma

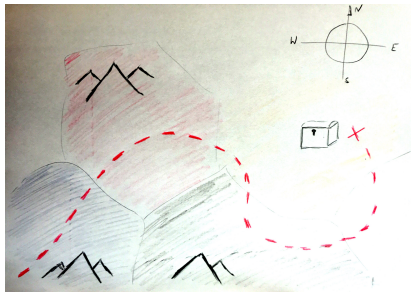


uniwersalny, najważniejszy rozkład prawdopodobieństwa

następujące zmienne losowe
(po przesunięciu i przeskalowaniu)
mają ten sam rozkład graniczny
(=rozkład Tracy'ego–Widoma):

- **długość najdłuższego podciągu rosnącego** $\text{LIS}(\pi_n)$
w losowej permutacji $1, \dots, n$, dla $n \rightarrow \infty$
BAIK, DEIFT, JOHANSSON
OKOUNKOV
- **największa wartość własna**
najpiękniejszej na świecie hermitowskiej **macierzy losowej** $n \times n$
dla $n \rightarrow \infty$,
- m.in. **rosnąca granica ośrodków pomiędzy turbulencjami w**
ciekłym kryształ
TAKEUCHI, SANO, SASAMOTO, SPOHN

mały morał



kombinatoryka asymptotyczna:

- związki z teorią macierzy losowych,
- poszukiwanie uniwersalności,
- ... ,

(dyskretna) transformata Fouriera

zamiast badać funkcję na prostej $x \mapsto f(x)$
lepiej badać jej **transformatę Fouriera**

$$\lambda \mapsto \int e^{i\lambda x} f(x) dx$$

zamiast badać ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
lepiej badać jego **dyskretną transformatę Fouriera**

$$k \mapsto \sum_{1 \leq m \leq n} e^{2\pi i \frac{km}{n}} a_m$$

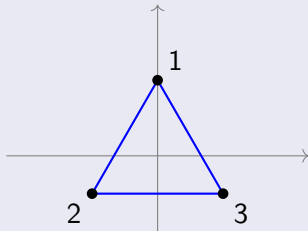
ale jak zdefiniować transformatę Fouriera na nieprzemiennej grupie?
→ teoria reprezentacji

reprezentacje 1

teoria reprezentacji: na jakie sposoby abstrakcyjna grupa może być zrealizowana konkretnie jako grupa macierzy?

przykład

grupa permutacji $S(3)$
permutacje zbioru $\{1, 2, 3\}$



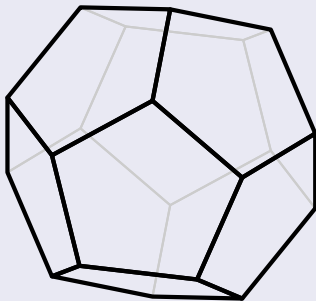
formalna definicja: **reprezentacja** ρ grupy G is to **homomorfizm**

$$\rho : G \rightarrow M_k$$

z grupy w odwracalne macierze

reprezentacje 2

przykład



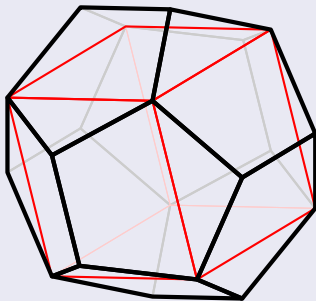
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład



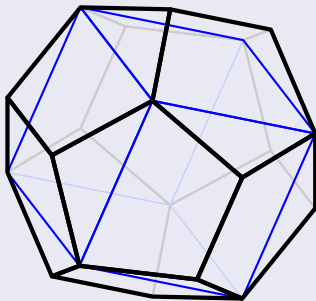
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład



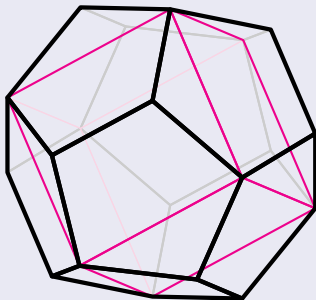
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład



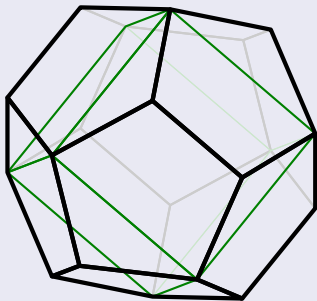
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład



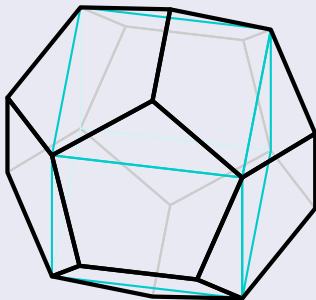
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład



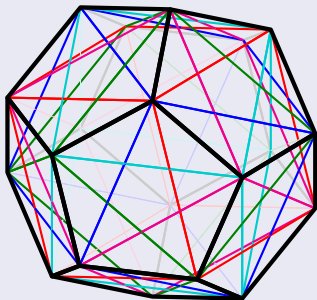
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład



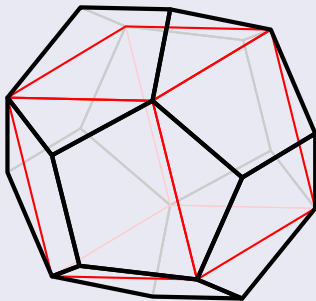
dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

reprezentacje 2

przykład

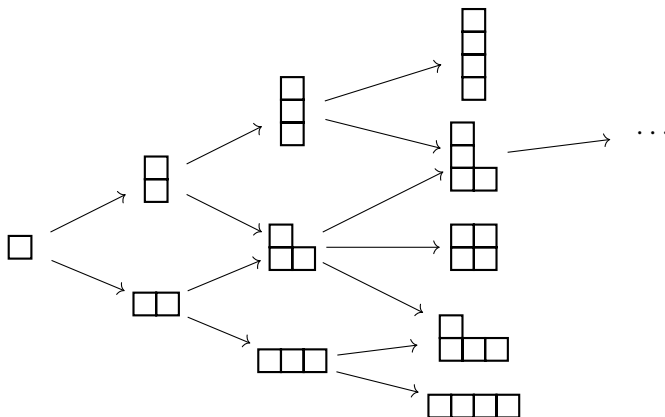


dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

nieredukowalne reprezentacje
grup permutacji $\mathfrak{S}(1) \subset \mathfrak{S}(2) \subset \mathfrak{S}(3) \subset \dots$



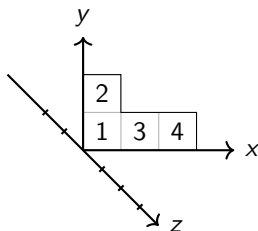
teoria reprezentacji $\longleftrightarrow$ kombinatoryka

kombinatoryka $\longleftrightarrow$ teoria reprezentacji / algebra

poniższe dwa losowe kształty mają ten sam rozkład:

- **PROBLEM ULAMA, NA STERYDACH**
weź losową permutację π liter $1, \dots, n$
i wyznacz wspólny kształt tableau $P(\pi)$ oraz $Q(\pi)$
zadanych przez algorytm RSK
- **PRAWIE NAJWAŻNIEJSZY PROBLEM
NIEPRZEMIENNEJ ANALIZY FOURIERA**
rozłóż tzw. reprezentację lewą regularną $\ell^2(\mathfrak{S}(n))$
na nieredukowalne składniki,
w losowy sposób wybierz jeden nieredukowalny składnik,
popatrz na odpowiadający mu kształt diagramu

alternatywny dowód:

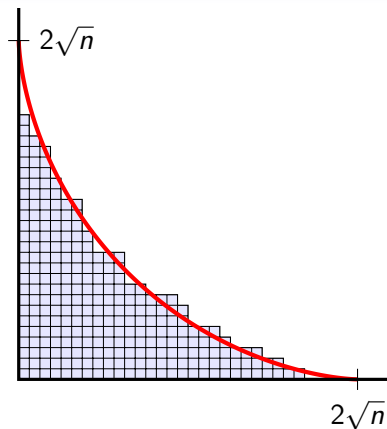


jeśli (x_k, y_k) to pozycja klatki z liczbą k w losowym tableau,

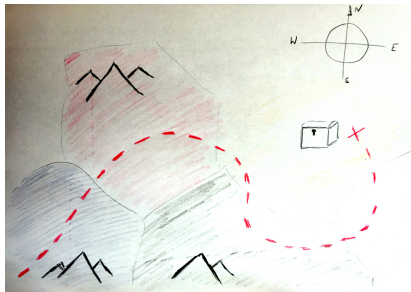
$$z_k = x_k - y_k$$

$J_k = (1, k) + (2, k) + \dots + (k-1, k)$ to suma małych transpozycji

$$\mathbb{E}[z_k^m] = \text{tr } \rho(J_k^m)$$



mały morał



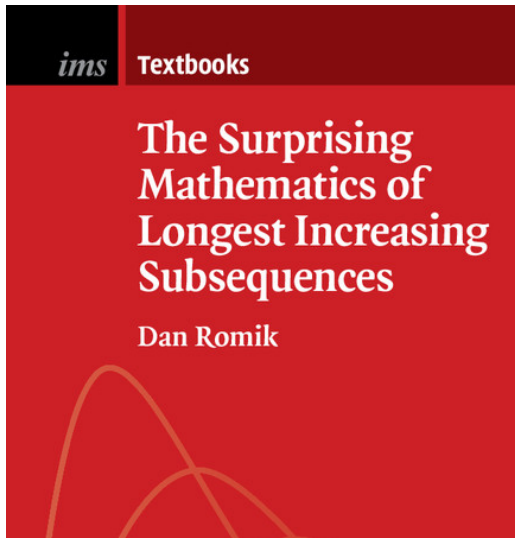
kombinatoryka algebraiczna:

- związki z teorią reprezentacji,
- ... ,

kombinatoryka asymptotyczna:

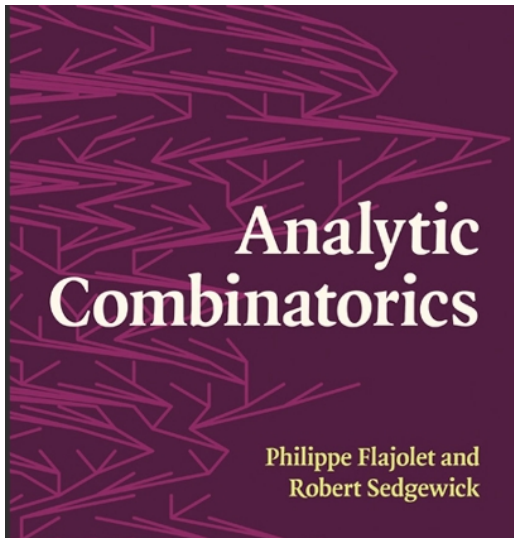
- związki z asymptotyczną teorią reprezentacji,
- ... ,

product placement 1



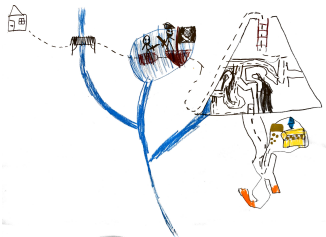
darmowy, legalny
plik PDF
na stronie autora

product placement 2



darmowy, legalny
plik PDF
na stronach autorów

zaproszenie do kombinatoryki asymptotycznej jest zawsze aktualne



dalsza lektura / materiały wideo

→ psniady.impan.pl Lecture notes