Piotr Śniady. Zaskakująca matematyka najdłuższych podciągów rosnących.

Małe Horyzonty, 25 XI 2017

Lecture notes -> psniady.impan.pl

permutacja

$$\sigma = (3, 1, 6, 7, 2, 5, 4)$$

o permutacji $\sigma \in S_n$ myślimy jak o ciągu

$$(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$$

interesują nas PODCIĄGI rosnące, np.

$$(3, \cancel{1}, 6, 7, \cancel{2}, \cancel{5}, \cancel{4})$$

$$(\cancel{3}, 1, \cancel{6}, \cancel{7}, 2, 5, \cancel{4})$$

$$(3, \cancel{1}, \cancel{6}, 7, \cancel{2}, \cancel{5}, \cancel{4})$$

$$\vdots$$

najdłuższy podciąg ma długość 3

$\ell(\sigma)$ = długość najdłuższego podciągu rosnącego wybranego z permutacji σ

Stanisław ULAM: jeśli σ jest LOSOWO WYBRANĄ PERMUTACJĄ z S_n, co możemy powiedzieć o zmiennej losowej $\frac{\ell(\sigma)}{\sqrt{n}}$?

Homework: udowodnij, że

a) $$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma)}{\sqrt{n}} > 3\right) = 0$$

b) $$\mathbb{P}\left(\frac{\ell(\sigma)}{\sqrt{n}} < 1\right) < \frac{1}{2}$$

Dan Romik "The surprising mathematics of longest increasing subsequences"

→ za darmo na stronie autora

POLECAM!

algorytm RSK

wejście = słowo np. **F O X D R P**

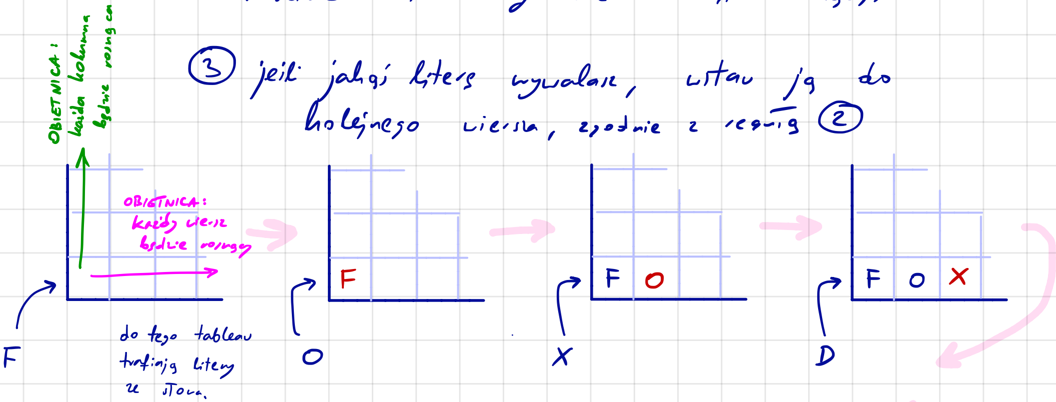
JAK POWSTAJE INSERTION TABLEAU P

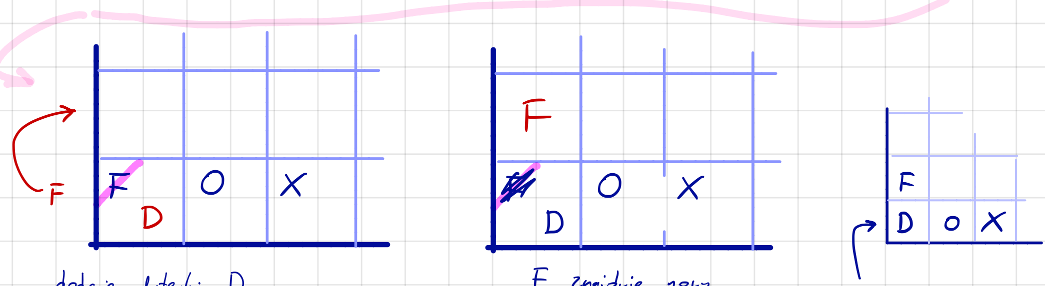
- czytaj po kolei litery słowa; dla danej litery

  ① zacznij od dolnego wiersza

  ② wstaw literę tak bardzo na prawo, jak to możliwe (tak aby wiersz był rosnący)

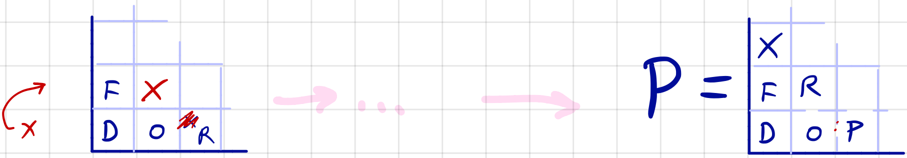
  ③ jeśli jakąś literę wywalasz, wstaw ją do kolejnego wiersza, zgodnie z regułą ②





dodanie literki D
— literka F zostaje wypchnięta

F znajduje nowy dom w drugim wierszu



algorytm RSK

wejście = słowo np. F O X D R P

JAK POWSTAJE RECORDING TABLEAU Q

„kolejność, w jakiej zapełniane były kratki w insertion tableau P"

$$Q = \begin{array}{|lll}
6 & & \\
4 & 5 & \\
1 & 2 & 3 \\ \hline
\end{array}$$

$$(\text{słowo}) \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$$

$$(F, O, X, D, R, P) \longmapsto \left(\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline X & & \\ \hline F & R & \\ \hline D & O & P \\ \hline \end{array}}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

liczba kolumn =
= długość najdłuższego podciągu rosnącego w słowie

ZADANIE DOMOWE:

problem Ulama na sterydach:

miara probabilistyczna na diagramach Younga o n kratkach
„miara Plancherela"

Co możemy powiedzieć o wspólnym kształcie P i $Q = \lambda$ dla losowo wybranej permutacji $\sigma \in S_n$?

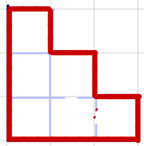


diagram Younga

$$\mathbb{P}(\lambda) = \frac{1}{n!} \left(f^{\lambda}\right)^2$$

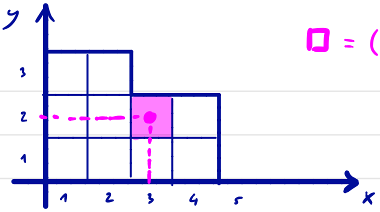
$f^{\lambda} = \#$ wypełnień kształtu λ liczbami $1 \dots n$ tak, aby wiersze i kolumny były rosnące

ZADANIE DOMOWE:

RSK jest BIJEKCJA, pomiędzy
- permutacjami z S_n
- parami (P, Q) takimi, że ... [fill in the gaps]

$$\mathbb{E} \sum_{\square=(x,y)\in\Lambda} (x-y)^k =$$

„geometria losowego / typowego diagramu Younga"



$\square = (3,2)$

$x = 3$

$y = 2$

„wielkość, którą zdesperowany kombinatoryk umie policzyć" $= [id]\left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k\right)$

wybieramy współczynnik stojący przy permutacji identycznościowej

$$[id] \sum_{\pi} f(\pi)\, \pi = f(id)$$

$$\frac{1}{n!} \operatorname{Tr} \rho_{reg}$$

$J_1 = 0$

$J_2 = (1,2)$

$J_3 = (1,3) + (2,3)$ transpozycje

$\vdots$

$J_i = (1,i) + (2,i) + \dots + (i-1, i)$

„elementy Jucysa-Murphy'ego"

$$\rho_{reg}(\pi) = \begin{array}{c c} & \text{kolumna } \sigma_2 \\ \text{wiersz } \sigma_1 & \begin{bmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \quad ? = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \sigma_1 = \pi \sigma_2 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

ogromna macierz $n! \times n!$ której wiersze i kolumny są indeksowane permutacjami z S_n

algebra grupowa = formalne kombinacje liniowe permutacji

$$\rho_{reg} : S_n \longrightarrow GL\left(\ell^2[S_n]\right)$$

homomorfizm grup

„odwracalne przekształcenia liniowe"

„reprezentacja lewa regularna"

OGÓLNIEJ:

REPREZENTACJA GRUPY G to DOWOLNY homomorfizm grup

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

jakaś przestrzeń liniowa

slang: „grupa G działa na przestrzeni liniowej V"

„ROZKŁADAMY DUŻĄ REPREZENTACJĘ NA MNIEJSZE REPREZENTACJE"

$$G = \cancel{S_n}$$

$$G = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

analiza harmoniczna / spacer losowy na grupie $\mathbb{Z}_n$?

operator splotu z $F \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$ to macierz $n \times n$:(

działa na tej przestrzeni liniowej

jednowymiarowe przestrzenie

$$\ell^2[\mathbb{Z}_n] = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_{n-1}$$

„reprezentacja lewa regularna ρ_{reg}"

operator splotu z $F \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$ = n- tka macierzy, :)

każda macierz 1×1

„splot $\longrightarrow$ mnożenie (małych) macierzy"

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n] \ni F \longmapsto (M_0, M_1, \dots, M_{n-1})$$

to jest ...

$$M_i = \rho^i(F)$$

DYSKRETNA TRANSFORMATA FOURIERA!

ρ^i – reprezentacja $\mathbb{Z}_n$

mówi jak $\mathbb{Z}_n$ działa na V_i

HINT: $$V_k = \mathrm{lin}\left(\xi^0\, 0 + \xi^k\, 1 + \xi^{2k}\, 2 + \dots + \xi^{(n-1)k}\, (n-1)\right)$$

$$\xi = e^{2\pi i \frac{1}{n}}$$

pierwotny pierwiastek z jedności

„ROZKŁADAMY DUŻĄ REPREZENTACJĘ NA MNIEJSZE REPREZENTACJE"

$$G = S_n \qquad \cancel{G = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}}$$

$$\ell^2[S_n] = \bigoplus_{\lambda} \underbrace{V^\lambda \oplus \dots \oplus V^\lambda}_{f^\lambda \text{ kopii tej samej przestrzeni } V^\lambda}$$

„reprezentacja lewa regularna S_n-a"

λ – diagramy Younga o n klatkach

na każdej kopii S_n działa tak samo

transformata Fouriera!

$$M_\lambda = \varrho^\lambda(F)$$

$$\mathbb{C}[S_n] \ni F \longmapsto (M_\lambda : \lambda \text{ – diagram Younga o } n \text{ klatkach})$$

MAGICZNY FAKT:

jeśli $F = p(J_1, \dots, J_n)$ to

wielomian symetryczny

Hint: elementy $J_1, \dots, J_n$ komutują i można wszystkie razem zdiagonalizować. Mają piękne wartości własne

„analiza harmoniczna"

$$p(J_1, \dots, J_n) \longmapsto (M_\lambda)$$

„kombinatoryka długich iloczynów transpozycji"

macierz identycznościowa

$$M_\lambda = p(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \cdot \mathbb{1}$$

$\{(x_i, y_i)\}$ – zbiór klatek diagramu λ

„geometria diagramu Younga"

dla $F \in \mathbb{C}[S_n]$ ...

$$[\mathrm{id}]\, F = \frac{1}{n!} \operatorname{Tr} \rho_{reg}(F)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda} f^{\lambda} \cdot \operatorname{Tr} \rho^{\lambda}(F)$$

tyle jest kopii reprezentacji V^{λ}

$\dim V^{\lambda} = f^{\lambda}$

$$\sum_{\lambda} \frac{(f^{\lambda})^2}{n!} \frac{\operatorname{Tr} \rho^{\lambda}(F)}{\dim V^{\lambda}} =$$

$= \mathbb{P}(\lambda)$ miara Plancherela

$$= \mathbb{E}_{\Lambda} \frac{\operatorname{Tr} \rho^{\Lambda}(F)}{\dim V^{\Lambda}}$$

Λ - losowy diagram Younga
- miara Plancherela

podstaw

$$F = J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k$$

macierz identycznościowa

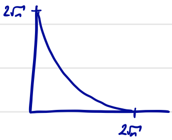
$$\rho^{\lambda}(F) = \sum_{\square = (x,y) \in \lambda} (x-y)^k \cdot \mathbb{1}$$

problem Stanisława Ulama

Kombinatoryka algebraiczna

zaskakujące bijekcje

RSK = Robinson-Schensted-Knuth



Losowe diagramy Younga

Teoria reprezentacji

„jeśli Twój obiekt ma jakieś symetrie, teoria reprezentacji może pomóc”

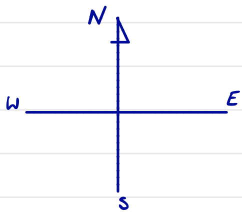
Kombinatoryka asymptotyczna

co się dzieje z (losowymi) obiektami kombinatorycznymi gdy stają się duże?

Analiza harmoniczna na nieprzemiennych grupach

„gdy zwykła transformata Fouriera już zawodzi”

góry i bagna



Teoria prawdopodobieństwa

odpowiedź na problem Ulama:

niezwykły rozkład prawdopodobieństwa który pojawia się też w świecie macierzy losowych

SKALA

1: 10 000 000 000

tam są

SMOKI