Piotr Śniady. Zaskakująca matematyka najdłuższych podciągów rosnących.

Małe Horyzonty, 25 XI 2017

Lecture notes -> psniady.impan.pl

permutacja

$$\sigma = (3, 1, 6, 7, 2, 5, 4)$$

interesują nas PODCIĄGI rosnące, np.

$$\left.\begin{array}{c} (3, \cancel{1}, 6, 7, \cancel{2}, \cancel{5}, \cancel{4}) \\ (\cancel{3}, 1, \cancel{6}, \cancel{7}, 2, 5, \cancel{4}) \\ (3, \cancel{1}, \cancel{6}, 7, \cancel{2}, \cancel{5}, \cancel{4}) \\ \vdots \end{array}\right\} \text{najdłuższy podciąg ma długość } 3$$

$\ell(\sigma)$ = długość najdłuższego <u>podciągu rosnącego</u> wybranego z permutacji σ

Stanisław ULAM: jeśli σ jest LOSOWO WYBRANĄ PERMUTACJĄ z S_n

co możemy powiedzieć o zmiennej losowej $\dfrac{\ell(\sigma)}{\sqrt{n}}$?

algorytm RSK

Wejście = słowo np. **F O X D R P**

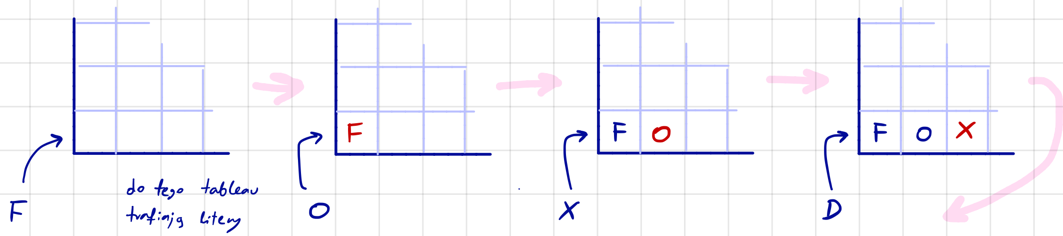
JAK POWSTAJE INSERTION TABLEAU P

- czytaj po kolei litery słowa; dla danej litery

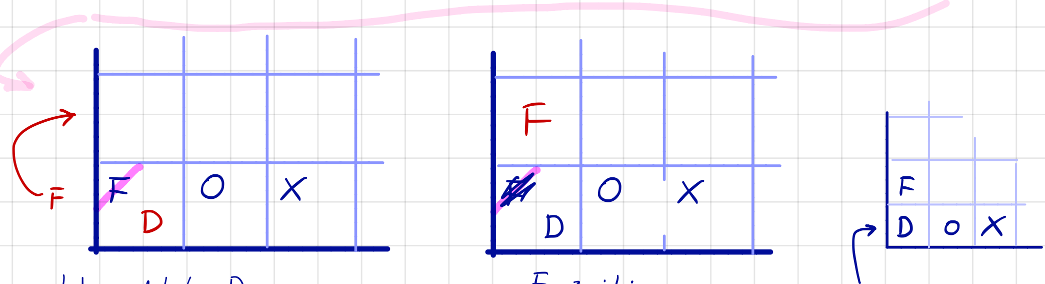
  ① zacznij od dolnego wiersza

  ② wstaw literę tak bardzo na prawo, jak to możliwe (tak aby wiersz był rosnący)

  ③ jeśli jakąś literę wywalasz, wstaw ją do kolejnego wiersza, zgodnie z regułą ②

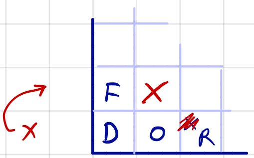


do tego tableau trafiają litery ze słowa.



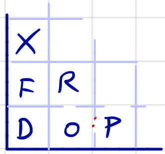
dodanie literki D
— literka F zostaje wypchnięta

F znajduje nowy dom w drugim wierszu



...

P =



algorytm RSK wejście = słowo np. **F O X D R P**

JAK POWSTAJE RECORDING TABLEAU Q

kolejność, w jakiej zapełniane były kratki w insertion tableau P

$Q=$

6		
4	5	
1	2	3

$$(\text{słowo}) \xrightarrow{RSK} (P, Q)$$

$(F, O, X, D, R, P) \longmapsto$

X		
F	R	
D	O	P

,

6		
4	5	
1	2	3

ZADANIE DOMOWE: liczba kolumn = = długość najdłuższego podciągu rosnącego w słowie

problem Ulama na sterydach:

miara probabilistyczna na diagramach Younga o n klatkach „miara Plancherela"

Co możemy powiedzieć o wspólnym kształcie P i Q dla losowo wybranej permutacji $\sigma \in S_n$?

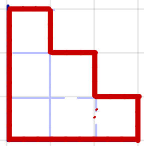


diagram Younga

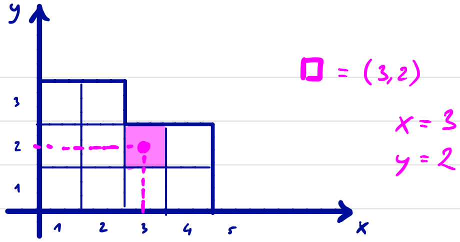
ZADANIE DOMOWE:

RSK jest BIJEKCJĄ, pomiędzy

- permutacjami z S_n
- parami (P, Q) takimi, że ... [fill in the gaps]

$$\mathbb{E} \sum_{\square=(x,y)\in\Lambda} (x-y)^k =$$

„geometria losowego / typowego diagramu Younga"



„wielkość, którą zdesperowany kombinatoryk umie policzyć"

$$= [\mathrm{id}] \left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k \right)$$

wybieramy współczynnik stojący przy permutacji identycznościowej

„elementy Jucysa–Murphy'ego"

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = (1,2)$$

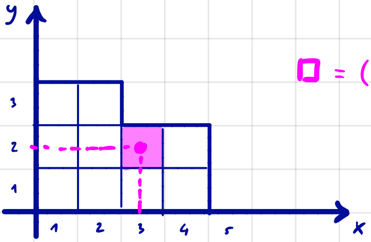
$$J_3 = (1,3) + (2,3)$$

$$\vdots$$

$$J_i = (1,i) + (2,i) + \dots + (i-1, i)$$

$$[\mathrm{id}] \sum_{\pi} f(\pi)\, \pi = f(\mathrm{id})$$

Anatomia diagramów Younga



$\square = (3,2)$

$x = 3$
$y = 2$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (4,4,2)$$

długość pierwszego wiersza

$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$ – losowy diagram Younga o n klatkach
rozkład: miara Plancherela

$$\mathbb{P}(\lambda) = \frac{1}{n!} d_\lambda^2$$

$$\mathbb{E}\, F(\Lambda) = ?$$

jakaś ładna funkcja na zbiorze diagramów Younga

$$\mathbb{E}\, \Lambda_1^k = ?$$

Λ_1 – długość pierwszego wiersza

tego nie umiemy policzyć :(

$$\mathbb{E} \sum_{\square = (x,y) \in \Lambda} (x-y)^k = \boxed{\text{KONKRETNA FORMUŁA, KTÓRA ZOSTAŁA OCENZUROWANA. 18+}}$$

:)

to umiemy policzyć, ale nie do końca o to nam chodziło...

... tym niemniej te wielkości są ze sobą związane i przy pomocy różnych sztuczek można je ze sobą spróbować porównać, na przykład...

$$\sum_{\square \in (x,y) \in \Lambda} (x-y)^{2m} \geq 0^{2m} + 1^{2m} + \dots + (\Lambda_1 - 1)^{2m} \approx \frac{1}{2m+1} \Lambda_1^{2m+1}$$

(to jest bardzo naiwna sztuczka, można to zrobić znacznie lepiej)

MAGICZNA FORMUŁA NA DZIŚ

$$\mathbb{E} \sum_{\square = (x,y) \in \Lambda} (x-y)^k = [\mathrm{id}] \left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k \right)$$

„geometria losowego / typowego diagramu Younga”

„wielkość, którą zdesperowany kombinatoryk umie policzyć”

CO TO JEST?

→ NASTĘPNA STRONA

- nasz świat:

algebra grupowa $\mathbb{C}[S_n] = \left\{ \sum_{\pi \in S_n} F_{(\pi)} \, \pi \; : \; F : S_n \longrightarrow \mathbb{C} \right\}$

„kombinacje liniowe elementów grupy permutacji”

JAK ZDEFINIOWAĆ DODAWANIE?

→ OCZYWISTE.

JAK ZDEFINIOWAĆ MNOŻENIE?

→ . . . WŁAŚCIWIE . . . TEŻ OCZYWISTE!

MNOŻENIE = SPLOT

urocze zastosowanie:

jeśli X, Y to niezależne losowe permutacje, to

$$P_{XY} = P_X \, P_Y$$

rozkład zmiennej losowej X, element algebry grupowej

PRZYKŁAD.

NOTACJA CYKLOWA. transpozycja zamieniająca 2 oraz 3.

$$\left(3 \,\mathrm{id} + (1,2) \right) \left(2 \,\mathrm{id} + (2,3) \right) =$$

$$= 6 \,\mathrm{id} + 3\,(2,3) +$$

$$+ 2\,(1,2) + (3,1,2)$$

$$\mathbb{E} \sum_{\square = (x,y) \in \Lambda} (x-y)^k = [id] \left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k \right)$$

wybieramy współczynnik stojący przy permutacji identycznościowej

$$[id] \sum_{\pi} f(\pi)\, \pi = f(id)$$

$J_1 = 0$

„elementy Jucysa-Murphy'ego"

$J_2 = (1,2)$

transpozycje

$J_3 = (1,3) + (2,3)$

$\vdots$

$J_i = (1,i) + (2,i) + \dots + (i-1, i)$

PRZYKŁAD. $k=2$.

$$\mathbb{E} \sum_{\square \in (x,y) \in \Lambda} (x-y)^2 = [id] \left(J_1^2 + \dots + J_n^2 \right) =$$

$$= 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)\,n}{2}$$

Z. DOMOWE.

1. dlaczego ta formuła nie mówi nic nowego dla nieparzystego k?
2. co ta formuła mówi dla $k=0$?
3. ⚠ ŻMUDNE! co ta formuła mówi dla $k=4$?

$$\mathbb{E} \sum_{\square = (x,y) \in \lambda} (x-y)^k = [id]\left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k\right)$$

LIS: najdłuższe podciągi rosnące — co teraz?

→ zbadaj asymptotykę prawej strony gdy $n \to \infty$ i/lub $k \to \infty$

→ następnie zamknij oczy: wydobądź informacje na temat LIS

→ ALE MY TEGO DZIŚ NIE ZROBIMY.

→ zamiast tego: JAKA FILOZOFIA STOI ZA FANTASTYCZNĄ FORMUŁĄ?

cóż za szalona filozofia doprowadziła do tak dziwnego wzoru ?!

Hint: analiza harmoniczna na nieprzemiennych grupach

$$\dots = \underbrace{[id]}_{\frac{1}{n!}\operatorname{Tr}\rho_{reg}\ ?}\left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k\right)$$

każda permutacja π może być traktowana jako ogromna macierz. Wiersze i kolumny są indeksowane przez permutacje z $S(n)$

$$\rho_{reg}(\pi) = \begin{array}{c|c} & \text{kolumna } \sigma_2 \\ \hline \text{wiersz } \sigma_1 & ? \end{array} \cdots \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \sigma_1 = \pi\sigma_2 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

$$\operatorname{Tr}\rho_{reg}(\pi) = \begin{cases} n! & \text{gdy } \pi = id \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$\dots = \underbrace{[id]}_{\frac{1}{n!}\operatorname{Tr}\rho_{reg}}\left(J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k\right)$$

✓ OK!

$$\rho_{reg}(\pi) = \begin{array}{c} \text{kolumna } \sigma_2 \\ \text{wiersz } \sigma_1 \; \boxed{\quad ? \quad} \end{array} \cdots \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \sigma_1 = \pi \sigma_2 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

ta szalona definicja została zrobiona tak, aby

$$\underbrace{\rho_{reg}(\pi \tau)}_{\text{iloczyn permutacji}} = \underbrace{\rho_{reg}(\pi) \; \rho_{reg}(\tau)}_{\text{iloczyn macierzy}}$$

„homomorfizm"

ABSTRAKCYJNE SPOJRZENIE

grupa S_n działa na przestrzeni liniowej $\ell^2[S_n] = \mathbb{C}[S_n]$ przez domnażanie z lewej strony.

$$\rho_{reg} : S_n \longrightarrow GL\left(\ell^2[S_n]\right)$$

„reprezentacja lewa regularna"

odwracalne przekształcenia liniowe

homomorfizm grup

$\rho_{reg}(\pi)$ jest macierzą odwzorowania zadanego na wektorach bazowych:

$$\sigma \longmapsto \pi \sigma$$

OGÓLNIEJ:

REPREZENTACJA GRUPY G to DOWOLNY homomorfizm grup

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

jakaś przestrzeń liniowa

$$\ldots = \underbrace{[id]}_{\frac{1}{n!}\operatorname{Tr}\rho_{reg}} \left(J_1^k + J_2^k + \ldots + J_n^k \right)$$

kolumna σ_2

$$\rho_{reg}(\pi) = \text{wiersz } \sigma_1 \;\; [\;?\;] \quad \ldots \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \sigma_1 = \pi \sigma_2 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

„ROZKŁADAMY DUŻĄ REPREZENTACJĘ NA MNIEJSZE REPREZENTACJE"

¿ czy da się znaleźć jakiś <u>dogodny</u> rozkład taki aby...

$$\underbrace{\ell^2[S_n]}_{\text{przestrzeń liniowa}} \overset{?}{=} V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

podprzestrzenie $\ell^2[S_n]$

na tej przestrzeni działa grupa S_n

... tak aby przestrzenie $V_1, \ldots$ były niezmiennicze na działanie S_n ?

TO GENIALNY POMYSŁ!

$\longrightarrow$ NEXT PAGE.

„ROZKŁADAMY DUŻĄ REPREZENTACJĘ NA MNIEJSZE REPREZENTACJE"

$$G = \cancel{S_n} \qquad G = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

analiza harmoniczna / spacer losowy na grupie $\mathbb{Z}_n$?

operator splotu z $F \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$

macierz $n \times n$

jednowymiarowe przestrzenie

$$\ell^2[\mathbb{Z}_n] = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_{n-1}$$

„reprezentacja lewa regularna"

operator splotu z $F \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$ = n-tka macierzy, każda macierz 1×1

„splot ⟶ mnożenie (małych) macierzy"

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n] \ni F \longmapsto (M_0, M_1, \dots, M_{n-1})$$

to jest ... DYSKRETNA TRANSFORMATA FOURIERA!

Hint: $V_k = \mathrm{lin}\left(\xi^0\, 0 + \xi^k\, 1 + \xi^{2k}\, 2 + \dots + \xi^{(n-1)k}\, (n-1)\right)$

$$\xi = e^{2\pi i \frac{1}{n}}$$ pierwotny pierwiastek z jedności

„ROZKŁADAMY DUŻĄ REPREZENTACJĘ NA MNIEJSZE REPREZENTACJE"

$$G = S_n \qquad\qquad G = \mathbb{Z}_n = \cancel{\{0, 1, 2, \dots, n-1\}}$$

$$\ell^2[S_n] = \bigoplus_{\lambda} \underbrace{V^\lambda \oplus \cdots \oplus V^\lambda}$$

„reprezentacja lewa regularna"

λ - diagramy Younga o n klatkach

f^λ kopii tej samej przestrzeni V^λ

na każdej kopii S_n działa tak samo

transformata Fouriera

$$M_\lambda = \rho^\lambda(F)$$

$$\mathbb{C}[S_n] \ni F \longmapsto \left(M_\lambda \ : \ \lambda \text{ - diagram Younga o } n \text{ klatkach} \right)$$

MAGICZNY FAKT:

jeśli $F = p(J_1, \dots, J_n)$ to

wielomian symetryczny

Hint: elementy $J_1, \dots, J_n$ komutują i można wszystkie razem zdiagonalizować. Mają piękne wartości własne

„analiza harmoniczna"

$$p(J_1, \dots, J_n) \longmapsto \left(M_\lambda \right)$$

macierz identycznościowa

„kombinatoryka długich iloczynów transpozycji"

$$M_\lambda = p(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \cdot \mathbb{1}$$

$\{(x_i, y_i)\}$ - zbiór klatek diagramu λ

„geometria diagramu Younga"

dla $F \in \mathbb{C}[S_n]$ ...

$$[\mathrm{id}]\, F = \frac{1}{n!} \operatorname{Tr} \rho_{reg}(F)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda} f^{\lambda} \cdot \operatorname{Tr} \rho^{\lambda}(F)$$

$\dim V^{\lambda} = f^{\lambda}$

$$\sum_{\lambda} \underbrace{\frac{(f^{\lambda})^2}{n!}}_{\mathbb{P}(\lambda)} \frac{\operatorname{Tr} \rho^{\lambda}(F)}{\dim V^{\lambda}} =$$

$$= \mathbb{E}_{\Lambda} \frac{\operatorname{Tr} \rho^{\Lambda}(F)}{\dim V^{\Lambda}}$$

podstaw

$$F = J_1^k + J_2^k + \dots + J_n^k$$

macierz identycznościowa

$$\rho^{\lambda}(F) = \sum_{\square = (x,y) \in \lambda} (x-y)^k \cdot \mathbb{1}$$

NA DŁUGIE JESIENNE WIECZORY

Dan Romik

"The surprising mathematics of longest increasing subsequences"

Cambridge University Press

→ za darmo na stronie autora

REKLAMA
BIURA PODRÓŻY

piękne bijekcje

kombinatoryka algebraiczna — zaskakujące tożsamości

analiza harmoniczna
na nieprzemiennych grupach

teoria
reprezentacji

geometryczna
teoria złożoności:

problem milenijny za 10^6 USD
$P \neq NP$?