Zaproszenie do kombinatoryki algebraicznej

tu jesteś w siebie

Piotr Śniady IMPAN

notatki $\longrightarrow$ psniady.impan.pl/oblicza

27 V 2021

AUDYCJA ZAWIERA LOKOWANIE PRODUKTU

- nie lubisz tracić wątku?
- chcesz dłużej oglądać ulubiony slajd?
- lubisz oglądać dwa slajdy naraz?
- szukasz wersji przyjaznej dla drukarek?

notatki: psniady.impan.pl/oblicza

Zaproszenie do kombinatoryki algebraicznej

tu jesteś w siebie

Piotr Śniady IMPAN

PLAN na dziś:

reprezentacje grup S_n

algebra $\longleftrightarrow$ kombinatoryka

po co nam teoria reprezentacji?

ile razy trzeba potasować talię kart,
aby ich rozmieszczenie
było naprawdę przypadkowe?

- transformata Fouriera
- analiza
- rachunek prawdopodobieństwa

na nieprzemiennych grupach

po co nam teoria reprezentacji?

ile prostych

przecina zadane trzy proste w $\mathbb{R}^3$

w położeniu ogólnym?

$\longrightarrow$ geometria algebraiczna

rachunek Schuberta

po co nam teoria reprezentacji?

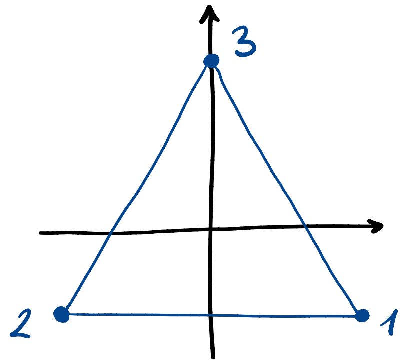
asymptotyczna

dlaczego $P \neq NP$?

$\longrightarrow$ geometryczna teoria złożoności

Co to jest reprezentacja?

PRZYKŁAD 1



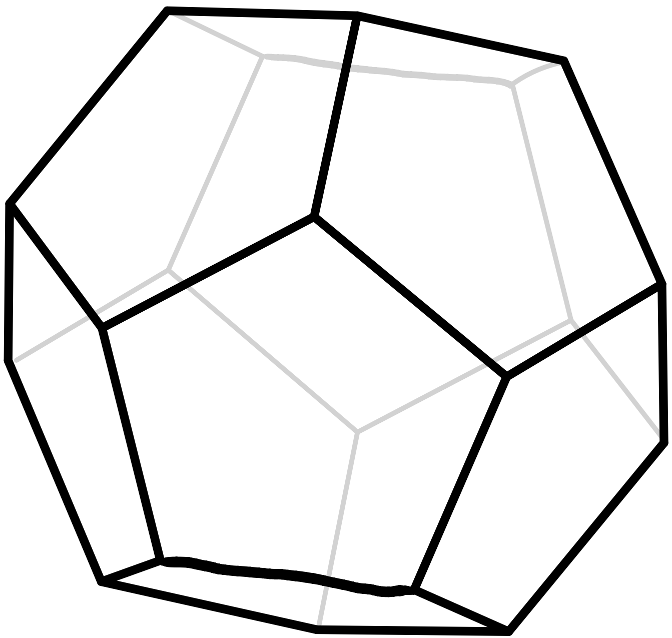
reprezentacja grupy permutacji zbioru $\{1, 2, 3\}$

FORMALNA DEFINICJA

reprezentacja grupy G to homomorfizm $\rho : G \longrightarrow M_n$

w odwracalne macierze

PRZYKŁAD 2

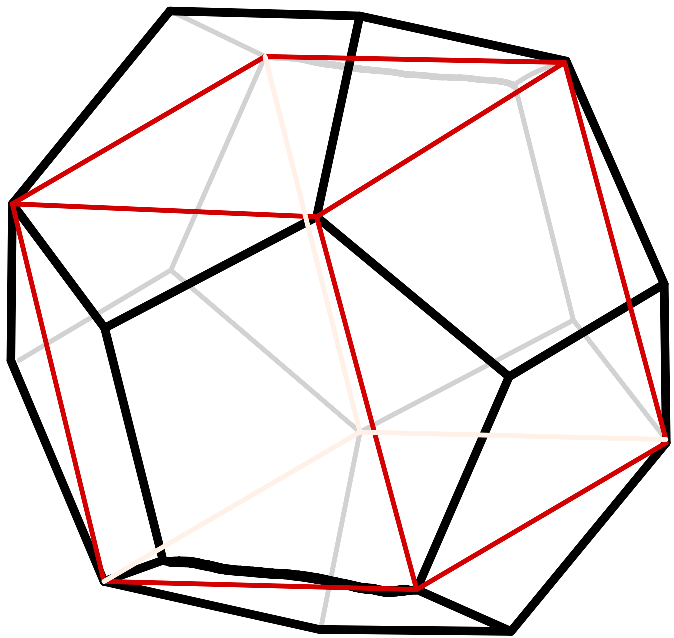


dowolny obrót dwunastościanu zadaje parzystą permutację pięciu sześcianów, element grupy alternującej A_5

to jest bijekcja

odwrócenie optyki: reprezentacja grupy alternującej A_5

PRZYKŁAD 2



dowolny obrót dwunastościanu zadaje parzystą permutację pięciu sześcianów, element grupy alternującej A_5

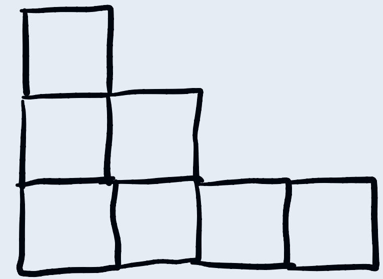
to jest bijekcja

odwrócenie optyki: reprezentacja grupy alternującej A_5

plan na dziś

nieredukowalne reprezentacje grup permutacji S_n

ALGEBRA



diagramy Younga

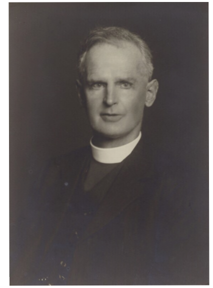
KOMBINATORYKA

---

notatki: psniady.impan.pl/oblicza

plan na dziś

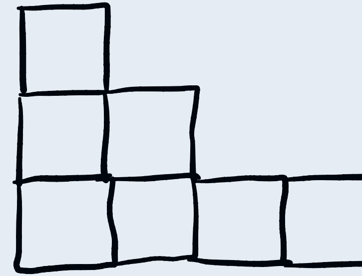
nieredukowalne reprezentacje grup permutacji S_n



Alfred Young

$\rightleftarrows$

1900



diagramy Younga

1873–1940

ALGEBRA

KOMBINATORYKA

notatki: psniady.impan.pl/oblicza

plan na dziś

nieredukowalne reprezentaje grup permutaji S_n

ALGEBRA

Andrei Okounkov

medal Fieldsa 2006

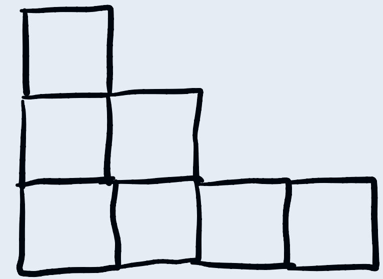
Anatoly Vershik

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

2005

Nowość!



diagramy Younga

KOMBINATORYKA

---

notatki: psniady.impan.pl/oblicza

idea: naturalny ciąg grup

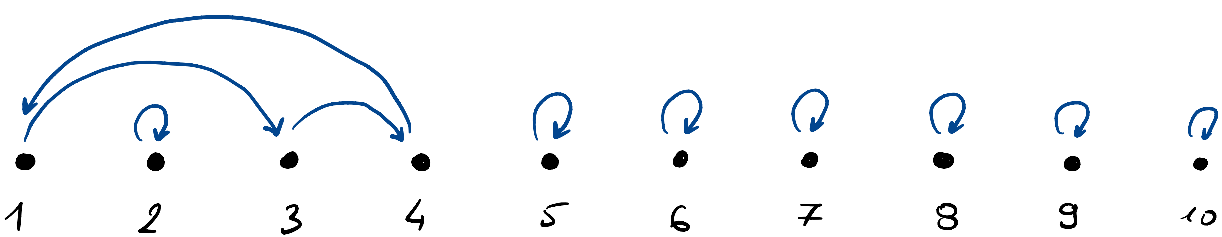
$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \cdots$$

grupa permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$

$= $ grupa permutacji zbioru $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, które są identycznością na zbiorze $\{n+1, n+2, \dots\}$

Zamiast badać reprezentacje każdej grupy osobno

może zbadamy je wszystkie naraz?



idea: naturalny ciąg grup i algebr grupowych

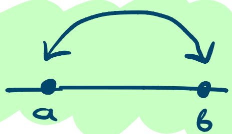
$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \cdots$$

co się stanie, jeśli...

(1) dodasz do siebie wszystkie transpozycje w dużej grupie S_{n+1}...

(2) dodasz do siebie wszystkie transpozycje w małej grupie S_n...

(3) i odejmiesz od siebie te dwie sumy?..

$(a, b) =$ 

słowniczek trudniejszych wyrazów

algebra grupowa:

kombinacje liniowe elementów grupy

mnożenie = splot jest nieprzemienne !

Odp: $X_{n+1} = (1, n+1) + (2, n+1) + \cdots + (n, n+1)$

element Jucysa-Murphy'ego

elementy Jucysa-Murphy'ego

BIG PICTURE: jak reprezentują się elementy Jucysa-Murphy'ego?

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = (1,2)$$

$$X_3 = (1,3) + (2,3)$$

$$\vdots$$

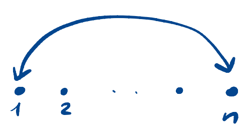
$$X_n = (1,n) + \dots + (n-1,n)$$

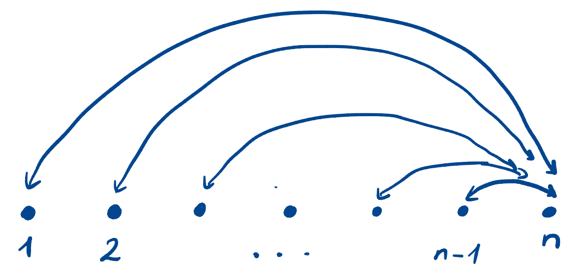
elementy $\mathbb{C}S_n$, algebry grupowej

KOMBINACJE LINIOWE ELEMENTÓW S_n

MNOŻENIE = SPLOT JEST NIEPRZEMIENNE!

transpozycja





elementy Jucysa-Murphy'ego

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = (1,2)$$

$$X_3 = (1,3) + (2,3)$$

$$\vdots$$

$$X_n = (1,n) + \dots + (n-1,n)$$

- komutują $\quad X_i X_j = X_j X_i$
- generują

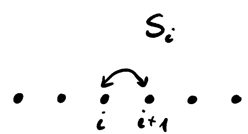
„maksymalną abelową podalgebrę $\mathbb{C}S_n$,”

→ algebra Gelfanda-Zetlina

elementy Jucysa-Murphy'ego i transpozycje

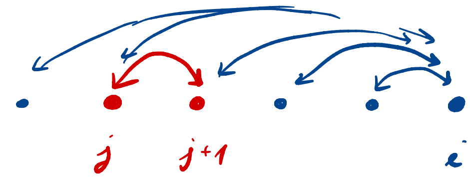
$$X_1 = 0$$
$$X_2 = (1,2)$$
$$X_3 = (1,3) + (2,3)$$
$$\vdots$$
$$X_n = (1,n) + \dots + (n-1,n)$$

$$s_1 = (1,2)$$
$$s_2 = (2,3)$$
$$\vdots$$
$$s_{n-1} = (n-1,n)$$



transpozycje Coxetera

[ciekawe relacje komutacji]



$$s_i \overset{?}{\rightleftarrows} X_i$$

- $X_i \, s_j = s_j \, X_i$ jeśli $j \notin \{i-1, i\}$ — komutują

- $s_i X_i + 1 = X_{i+1} s_i$ — prawie komutują

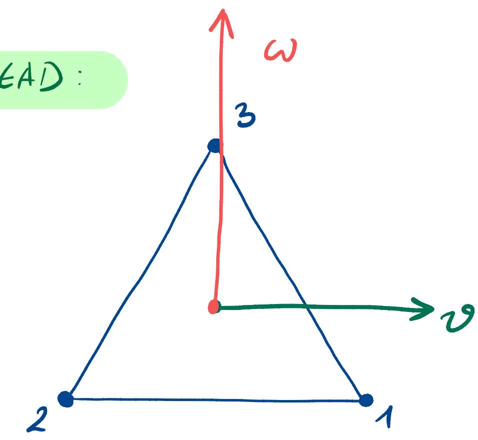
PLAN: wywnioskować z tych relacji jak NIE MOŻE wyglądać reprezentacja S_n

jak mogą się reprezentować elementy Jucysa-Murphy'ego?

Każda nieredukowalna reprezentacja S_n posiada bazę liniową, w której elementy J-M się diagonalizują

$\longrightarrow$ „wspólne wektory własne"

PRZYKŁAD:



$$X_1 v = 0 \cdot v$$
$$X_2 v = (-1) \cdot v$$
$$X_3 v = 1 \cdot v$$

wartość własna: $(0, -1, 1)$

$$X_1 \omega = 0 \cdot \omega$$
$$X_2 \omega = 1 \cdot \omega$$
$$X_3 \omega = (-1) \cdot \omega$$

wartość własna: $(0, 1, -1)$

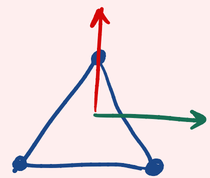
jakie są ~~nie~~ możliwe wartości własne?

PRZYKŁAD:

wszystkie nieredukowalne reprezentacje grupy S_3

0, −1, 1

0, 1, −1



0, 1, 2 jednowymiarowa reprezentacja

0, −1, −2 jednowymiarowa reprezentacja

dlaczego?

wartości własne

a dlaczego nie ma np. 5, 17, −24?

jakie są ~~nie~~możliwe wartości własne? $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$X_1 v = \lambda_1 v$ $\qquad X_1 = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

$X_2 v = \lambda_2 v$ $\qquad X_2 = (1,2) \qquad X_2^2 = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \pm 1}$

$X_3 v = \lambda_3 v$

czy v jest wektorem własnym transpozycji $s_2 = (2,3)$?

- TAK $\Rightarrow s_2 v = c \cdot v \qquad c = \pm 1$

$s_2 X_2 + 1 = X_3 s_2 \Rightarrow s_2 X_2 v + 1 v = X_3 s_2 v$

$c \cdot \lambda_2 + 1 = \lambda_3 \cdot c \qquad \Leftrightarrow \boxed{\lambda_3 = \lambda_2 \pm 1}$

i na odwrót też

- NIE $\longrightarrow$ następna strona

czy v jest wektorem własnym transpozycji $s_2 = (2,3)$?

- NIE   spójrz na dwuwymiarową przestrzeń liniową z bazą v, $s_2 v$

$$X_3 s_2 = s_2 X_2 + 1$$

$$X_3 s_2 v = s_2 X_2 v + 1 v$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- diagonalizowalne
- wektory własne : v i w

NEW!

$$X_1 w = \lambda_1 w \qquad X_2 w = \lambda_3 w \qquad X_3 w = \lambda_2 w$$

$\Longrightarrow$ $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2)$ jest wartością własną jakie są ~~nie~~ możliwe wartości własne? $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

MORAŁ

$X_1 \, v = \lambda_1 \, v$ $\lambda_1 = 0$

$X_2 \, v = \lambda_2 \, v$ $\lambda_2 = \pm 1$

$X_3 \, v = \lambda_3 \, v$

$\lambda_3 = \lambda_2 \pm 1$ **lub** $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2)$ też jest wartością własną

bardzo silne ograniczenia™ vol 1

[Łatwo uogólnić ten warunek]

ZADANIE DOMOWE:

dlaczego $(0, 1, 17)$ nie może być wartością własną?

HINT:

jakie są niemożliwe wartości własne? $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$(a, a \pm 1, a)$ nie może być wartością własną

bardzo silne ograniczenia™ vol 2.

$$\lambda_3 = \lambda_2 \mp 1 \implies s_2 \, \vartheta = (\mp 1)\cdot \vartheta$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \pm 1 \implies s_1 \, \vartheta = (\pm 1)\cdot \vartheta$$

$$s_1 \, s_2 \, s_1 \, \vartheta = s_2 \, s_1 \, s_2 \, \vartheta$$

$$(\pm 1)\cdot(\mp 1)(\pm 1) \neq (\mp 1)\cdot(\pm 1)(\mp 1)$$ ↯ sprzeczność.

[łatwo uogólnić ten warunek]

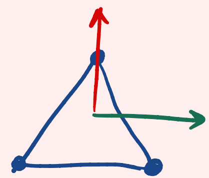
jakie są nie możliwe wartości własne ?

PRZYKŁAD:

wszystkie nieredukowalne reprezentacje grupy S_3

0, −1, 1

0, 1, −1



0, 1, 2 jednowymiarowa reprezentacja

0, −1, −2 jednowymiarowa reprezentacja

czy te liczby mają inną interpretację?

ZADANIE DOMOWE:

uzasadnij, że **bardzo silne ograniczenia**™ nie pozwalają na wartości własne spoza tej tabelki

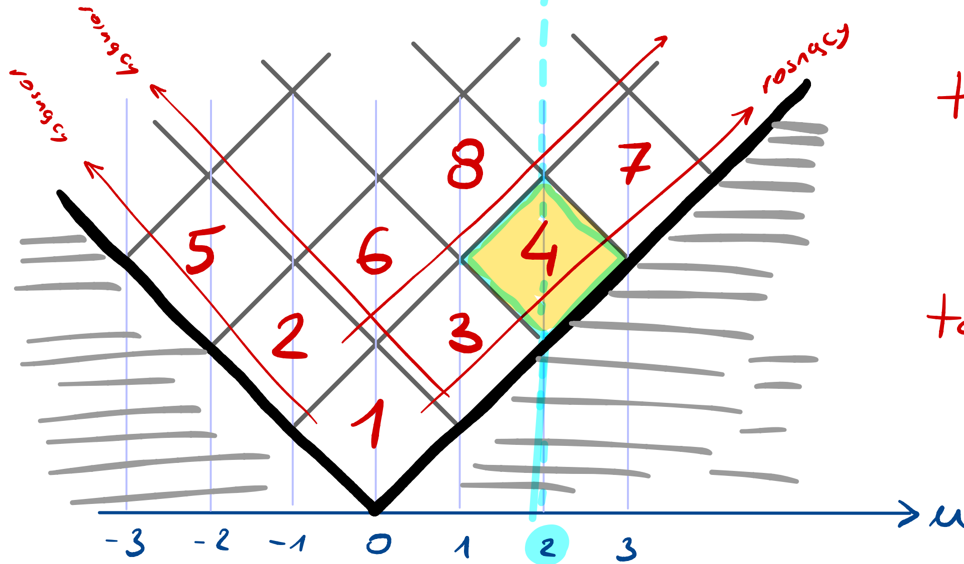


tableau Younga :

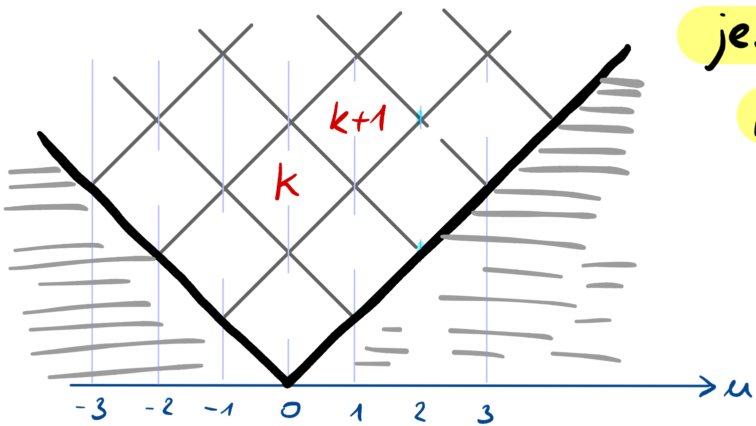
ponumerowane bloczki w rynnie

tableau $\longmapsto$ wektor u-współrzędnych

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) =$$

$$\longmapsto (0, -1, 1, 2, -2, 0, 3, 1)$$

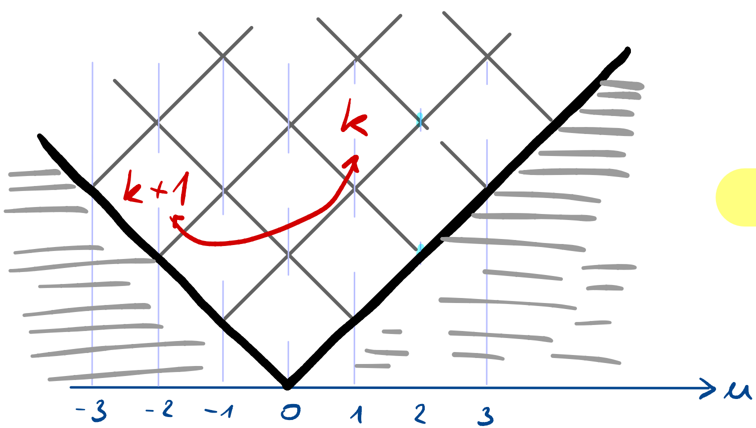
jakie są ograniczenia dla możliwych u-wektorów?



jeśli $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ jest możliwym wektorem u-współrzędnych...

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k \pm 1$$

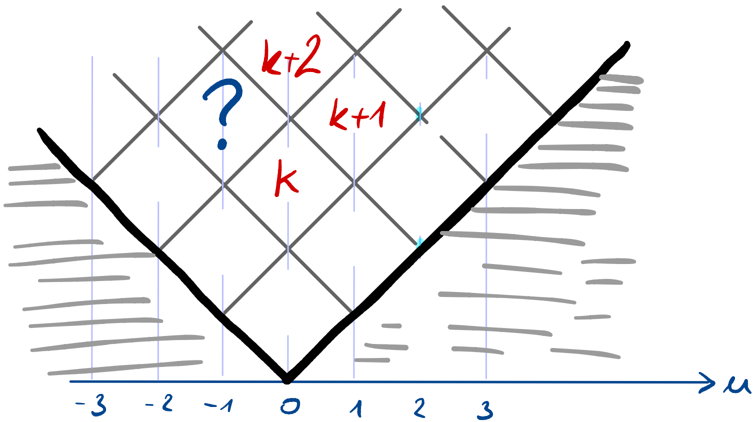
lub



$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \lambda_k, \lambda_{k+2}, \dots)$$

też jest możliwym wektorem

DÉJÀ VU ?



$(\ldots, a, a \pm 1, a, \ldots)$

nie jest możliwym wektorem

DÉJÀ VU ?

niemożliwe!

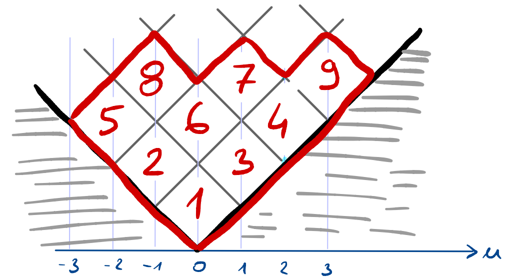
morał

- wartości własne elementów Jucysa-Murphy'ego

algebra

↔

- tableau Younga

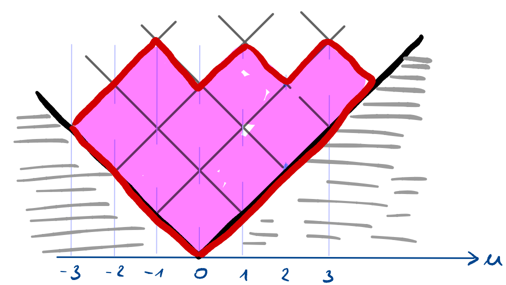


kombinatoryka

- nieredukowalne reprezentacje S_n

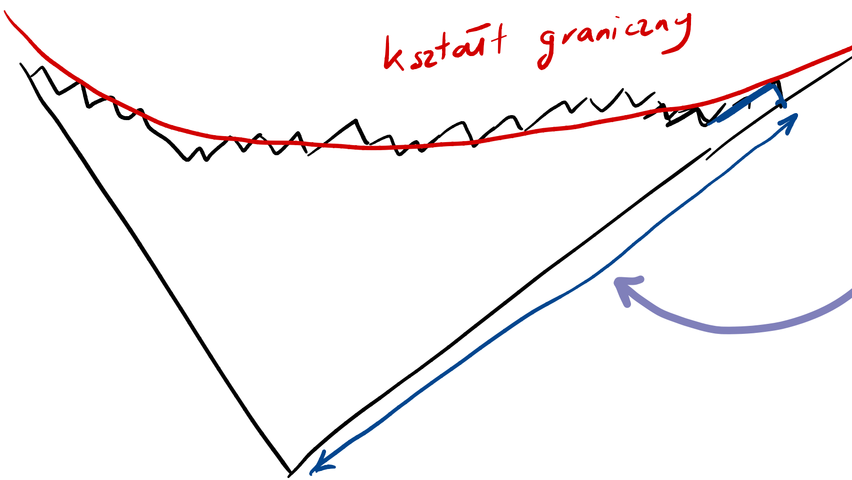
↔

- diagramy Younga o n klatkach



science fiction: asymptotyczna teoria reprezentacji S_n

$n \to \infty$



losowa nieredukowalna reprezentacja S_n

fluktuacje zbiegają do niegausowskiej granicy = największa wartość własna macierzy losowych GUE

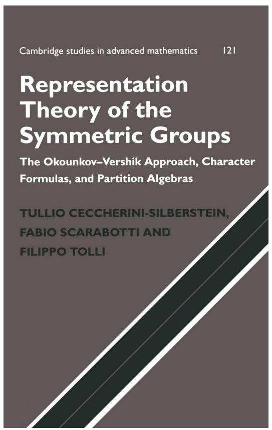
dowód: elementy Jucysa-Murphy'ego

$\longrightarrow$ Andrei Okounkov

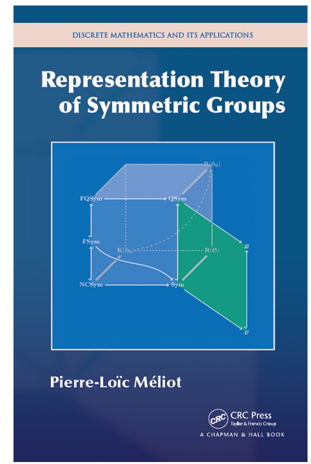
medal Fieldsa 2006

Co warto czytać?

- Andrei Okounkov, Anatoly Vershik
  A new approach to representation theory of symmetric groups



T. Ceccherini-Silberstein
F. Scarabotti
F. Tolli



Pierre-Loïc Méliot

→ psniady.impan.pl