Piotr Śniady, Teoria reprezentacji

Pierwsze Horyzonty 2020

nasz ulubiony przykład $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$

! notacja multiplikatywna

element neutralny

$$\mathbb{Z}_3 = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}, \mathbb{2}\}$$

!

$$a \cdot b = (a+b \bmod 3)$$

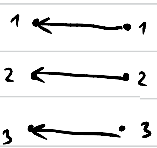
„dodaj i weź resztę z dzielenia przez 3"

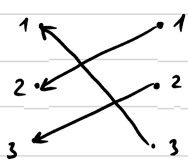
$$\mathbb{0}\cdot\mathbb{0} = \mathbb{0} \qquad \mathbb{0}\cdot\mathbb{1} = \mathbb{1} \qquad \mathbb{0}\cdot\mathbb{2} = \mathbb{2}$$

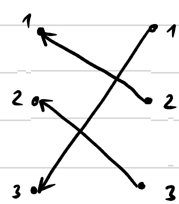
$$\mathbb{1}\cdot\mathbb{1} = \mathbb{2} \qquad \mathbb{1}\cdot\mathbb{2} = \mathbb{0}$$

$$\mathbb{2}\cdot\mathbb{2} = \mathbb{1}$$

alternatywnie : $\mathbb{Z}_3 \subseteq S_3$

$\mathbb{0} =$ 

$\mathbb{1} =$ 

$\mathbb{2} =$ 

pewne szczególne permutacje zbioru $\{1,2,3\}$

②

algebra grupowa $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$
to...

... zbiór $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3 = \{ f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{C} \}$

przestrzeń liniowa

wyposażony w mnożenie : dla $f, g \in \mathbb{C}\mathbb{Z}_3$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{\substack{a, b \in \mathbb{Z}_3 \\ a \cdot b = x}} f(a) \cdot g(b)$$

„splot"

ten sam obiekt, różne języki

... zbiór formalnych kombinacji liniowych
(zbiór napisów takiej postaci:)

$$f_0 \cdot \mathbb{0} + f_1 \cdot \mathbb{1} + f_2 \cdot \mathbb{2}$$

dla $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{C}$

tworzą przestrzeń liniową

wyposażony w jedynie słuszne mnożenie

„rozdzielność mnożenia względem dodawania"

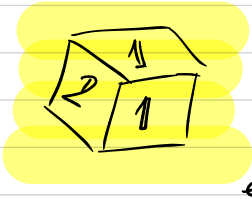
$$(f_0 \mathbb{0} + f_1 \mathbb{1} + f_2 \mathbb{2}) \cdot (g_0 \mathbb{0} + g_1 \mathbb{1} + g_2 \mathbb{2}) =$$

$$= f_0 g_0 \, \mathbb{0}\mathbb{0} + \underbrace{f_0 g_1}_{\text{iloczyn w } \mathbb{C}} \, \underbrace{\mathbb{0} \cdot \mathbb{1}}_{\text{iloczyn grupowy}} + f_0 g_2 \, \mathbb{0}\mathbb{2} + f_1 g_0 \, \mathbb{1} \cdot \mathbb{0} + \ldots + f_2 \cdot g_2 \, \mathbb{2}\mathbb{2}$$

[3 · 3 składniki]

$\mathbb{0} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot \mathbb{0} = \mathbb{2} \cdot \mathbb{2} = \mathbb{1}$

możesz połączyć te składniki



na ściankach kostki do gry umieszczono elementy $\mathbb{Z}_3$...

$X_1, \dots, X_{100} \in \mathbb{Z}_3$ to wyniki niezależnych rzutów kostką...

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = 0, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{3}$$

jaki ma rozkład $X_1 \cdots X_{100}$?

„rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych to splot ich rozkładów"

TAKI ma rozkład

$\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$

$$\left(0 \cdot 0 + \frac{2}{3}\, 1 + \frac{1}{3}\, 2\right)^{100} = ?$$

ale jak to obliczyć w praktyce?

elementy $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$ są świetne do zapisywania rozkładów prawdopodobieństwa na $\mathbb{Z}_3$.

④

transformata Fouriera na $\mathbb{Z}_3$ ← trzy odwzorowania liniowe

$$F_0, F_1, F_2 : \mathbb{C}\mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$F_k\Big(\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}_3} f_m\, m}_{\text{nudy}}\Big) = \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}_3} f_m}_{\text{nudy}}\ \Big[\underbrace{e^{\frac{2\pi}{3} i}}_{\text{pierwotny pierwiastek z jedności}} {}^{k}\Big]^{m}$$

$m \in \mathbb{Z}_3$

[jeśli to ma być odwzorowanie liniowe, nie mamy wyboru]

Wspaniały fakt

dla $f, g \in \mathbb{C}\mathbb{Z}_3$

$$\boxed{F_k(\underbrace{f \cdot g}_{\text{iloczyn w } \mathbb{C}\mathbb{Z}_3}) = F_k(f) \cdot F_k(g)}$$

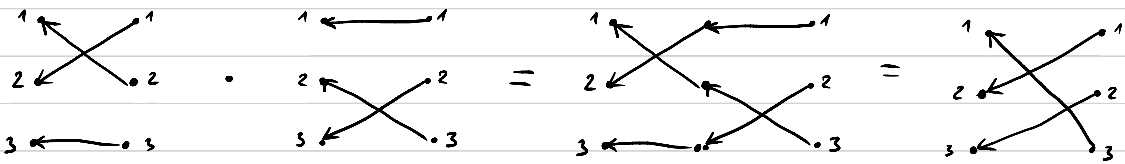
mnożenie w $\mathbb{C}$

①
$$\underbrace{F_k}\Big[\underbrace{\left(0 \cdot 0 + \tfrac{2}{3}\, 1 + \tfrac{1}{3}\, 2\right)^{100}}\Big] =$$

$$\underbrace{\left[F_k\left(0 \cdot 0 + \tfrac{2}{3}\, 1 + \tfrac{1}{3}\, 2\right)\right]^{100}}_{\text{potęgowanie liczb zespolonych jest proste.}}$$

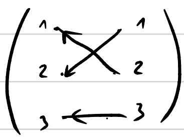
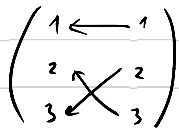
② te trzy liczby wyznaczają $\left(0 \cdot 0 + \tfrac{2}{3}\, 1 + \tfrac{1}{3}\, 2\right)^{100}$

nasz ulubiony nieprzemienny przykład: grupa S_3

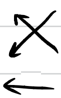


mnożenie w grupie to składanie permutacji

pojedyncze **przetasowanie** trzech kart wygląda tak:

$\mathbb{P}$ () $= \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\mathbb{P}$ () $= \frac{2}{3}$.

jaki jest rozkład prawdopodobieństwa po 100 przetasowaniach?

$$\underbrace{\left[\frac{1}{3} \right.}$$  $+ \frac{2}{3}$  $\left. \right]^{100} = \; ?$

element algebry grupowej $\mathbb{C} S_3$

lubisz Łańcuchy Markowa? w tym przypadku macierz przejścia ma rozmiar 6×6.

czy da się prościej?

transformata Fouriera?

⑥

DEFINICJA

dla najlepszych efektów, używaj przestrzeni rzeczywistych lub zespolonych ♡

rekomendowane przez 90% dentystów

jeśli G - grupa skończona

jeśli V jest przestrzenią liniową, $\dim V < \infty$,

zaś $\varrho : G \longrightarrow \underbrace{GL(V)}_{\text{grupa odwracalnych przekształceń liniowych}}$ jest **homomorfizmem grup**, tzn

alternatywnie: $\varrho : G \longrightarrow \underbrace{GL_k}_{\text{odwracalne macierze } k \times k}$

$$\varrho(\pi_1 \cdot \pi_2) = \varrho(\pi_1) \cdot \varrho(\pi_2),$$

mówimy, że **ϱ jest reprezentacją G**

lub że **V jest reprezentacją G**

fachowcy lubią też mówić: „V jest G-modułem"

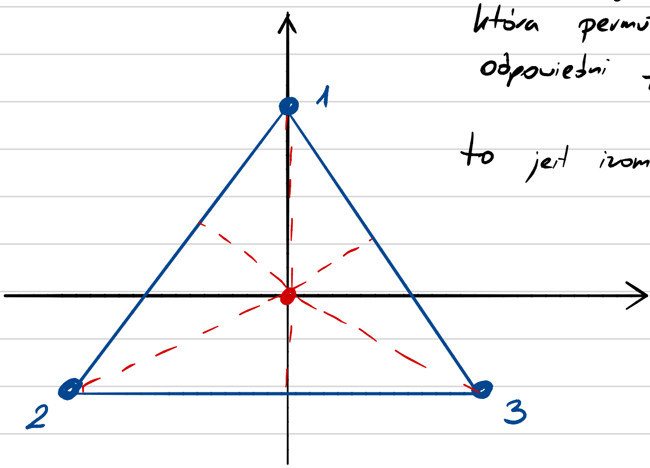
idea: „wykorzystajmy narzędzia algebry liniowej do badania grupy G."

PRZYKŁADY REPREZENTACJI S_3

PRZYKŁAD

permutacji $\pi \in S_3$ przypisujemy izometrię trójkąta, która permutuje wierzchołki w odpowiedni sposób.

to jest izometria liniowa



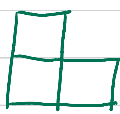
$V = \mathbb{R}^2$

! środek masy trójkąta w początku układu współrzędnych

TAK, to jest przykład REPREZENTACJI NIEREDUKOWALNEJ

ten przykład jest rzeczywisty, do pewnych zastosowań lepiej wziąć

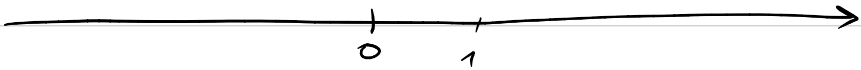
$V = \mathbb{C}$



sekretny masoński symbol opisujący tę reprezentację.

PRZYKŁAD

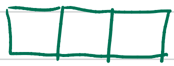
$V = \mathbb{R}$



każdej permutacji π przypisujemy odwzorowanie liniowe

$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (lub macierz $[1]$)

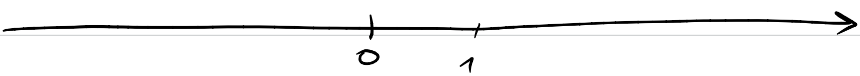
TAK, to jest przykład REPREZENTACJI NIEREDUKOWALNEJ



sekretny masoński symbol opisujący tę reprezentację.

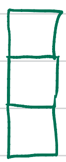
PRZYKŁAD

$V = \mathbb{R}$



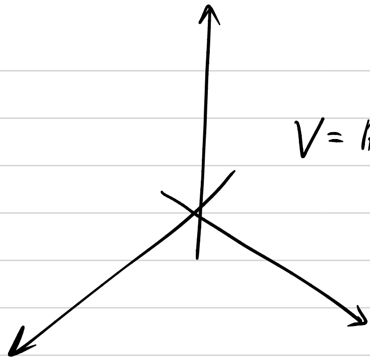
$$\rho(\pi) = \begin{cases} id = [1] & \text{jeśli } \pi \text{ jest parzysta} \\ -id = [-1] & \text{jeśli } \pi \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

TAK, to jest przykład REPREZENTACJI NIEREDUKOWALNEJ



sekretny masoński symbol opisujący tę reprezentację.

PRZYKŁAD



permutacja $\pi \in S_3$ działa permutując

współrzędne wektora:

$$\rho\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_3\\x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

macierz: $\rho\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

nomen omen
macierz permutacyjna

istnieją podprzestrzenie niezmiennicze dla <u>wszystkich</u> $\rho(\pi)$:

* $W = \left\{ \begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

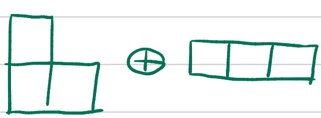
obcięcie ρ do W
również jest reprezentacją

* $Z = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : x+y+z=0 \right\}$

obcięcie ρ do Z
również jest reprezentacją

nie, ta reprezentacja
NIE JEST NIEREDUKOWALNA

FUJ!



sekretny masoński
symbol opisujący
tę reprezentację.

(10)

Definicja

Niech V będzie reprezentacją grupy G.

Jeśli istnieje przestrzeń liniowa $W \subseteq V$

taka, że $\forall g \in G \quad \rho(g) W \subseteq W$,

oraz $W \neq \{0\}$, $W \neq V$

to mówimy, że **V jest redukowalna.**

przestrzeń W o tej własności również jest reprezentacją tej samej grupy G.

FUJ!

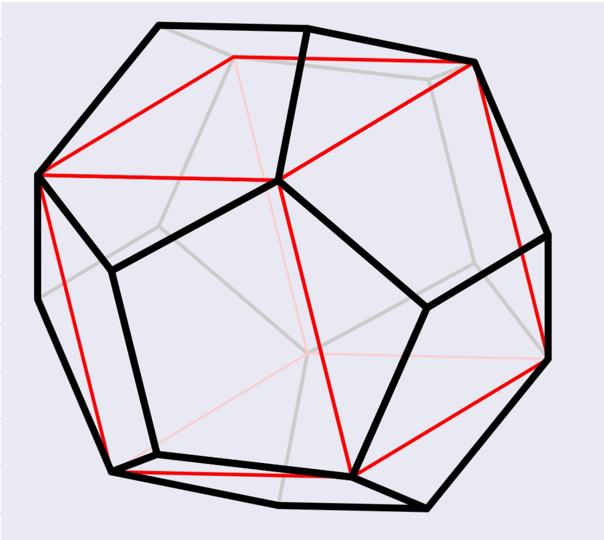
W przeciwnym razie V jest nieredukowalna

BRAWO!

WSPANIAŁY FAKT. Każda reprezentacja może być zapisana (w „prawie jedyny” sposób) jako suma reprezentacji nieredukowalnych.

Istnieje tylko skończenie wiele reprezentacji nieredukowalnych (jeśli umówimy się w rozsądny sposób, kiedy dwie reprezentacje są praktycznie nierozróżnialne)

PRZYKŁAD SCIENCE FICTION



- w dwunastościan foremny można wpisać sześcian na pięć sposobów

- pięć sześcianów

- każdy obrót dwunastościanu (= izometria zachowująca orientację) zadaje parzystą permutację pięciu sześcianów czyli element A_5

- zadanie domowe: udowodnij, że jest to bijekcja między obrotami dwunastościanu i elementami A_5.

- odwzorowanie odwrotne

$$\varrho : A_5 \longrightarrow \{\text{obroty dwunastościanu}\}$$

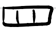
jest reprezentacją grupy A_5.

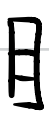
12

Transformata Fouriera na S_3

trzy wspaniałe funkcje

ρ  $: \mathbb{C}S_3 \longrightarrow M_2$ — zespolone macierze 2×2

ρ  $: \mathbb{C}S_3 \longrightarrow M_1 = \mathbb{C}$ — zespolone macierze 1×1

ρ  $: \mathbb{C}S_3 \longrightarrow M_1 = \mathbb{C}$ — zespolone macierze 1×1

wszystkie nierozkładalne reprezentacje S_3

$\rho_X \Big[\Big[\frac{1}{3}$  $+ \frac{2}{3}$  $\Big]^{100} \Big]$ $=$ — the inner bracket is marked: $= ?$

te trzy macierze 2×2, 1×1, 1×1 jednoznacznie wyznaczają wartość

$\Big[\frac{1}{3}$  $+ \frac{2}{3}$  $\Big]^{100}$

$\Big(\rho_X \Big[\frac{1}{3}$  $+ \frac{2}{3}$  $\Big] \Big)^{100}$

potęgowanie macierzy 1×1 lub 2×2 nie jest takie bolesne

Po co ludzkości teoria reprezentacji?

- ile razy należy przetasować talię kart, aby była dobrze potasowana?

  $\longrightarrow$ analiza harmoniczna na grupach

- mechanika kwantowa:

  przestrzeń liniowa $V = \mathcal{H}$ przestrzeń Hilberta

  grupa $G = SO(3)$ obroty przestrzeni $\mathbb{R}^3$

  nieredukowalne reprezentacje $SO(3)$ =
  = stany kwantowe o ustalonym momencie pędu J

  operacje na nieredukowalnych reprezentacjach, iloczyn tensorowy
  = składanie momentu pędu, współczynniki Clebscha-Gordana

- ile prostych przecina zadane cztery proste w $\mathbb{R}^3$?

  $\longrightarrow$ geometria algebraiczna, rachunek Schuberta, wielomiany Schura

- $P \neq NP$

  $\longrightarrow$ geometryczna teoria złożoności

(14)

Dalsza lektura.

https://en.wikipedia.org/wiki/Representation_theory

J.P. Serre. Reprezentacje liniowe grup skończonych.

W. Fulton, J. Harris. Representation theory. A first course.

D. Romik. The surprising mathematics of longest increasing subsequences.

Hint: legalny plik dostępny za darmo na stronie domowej autora.

P. Flajolet, R. Sedgewick Analytic combinatorics

Hint: legalny plik na stronach domowych autorów

P.-L. Méliot Representation theory of symmetric groups

slajdy na stronie psniady.impan.pl → LECTURE NOTES

szukasz promotora doktoratu / magisterium?

stypendia ⟶ psniady.impan.pl/jobs

szkoła letnia z kombinatoryki algebraicznej

Kraków, 6-10 lipca 2020

⟶ psniady.impan.pl/school