

Teoria reprezentacji

Piotr Śniady

IMPAN TORUŃ

Pierwsze Horyzonty 2020

psniady.impan.pl → LECTURE NOTES

nasz ulubiony przykład:

grupa $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

! notacja m*u*ltyp*l*ikatywna

$$a \cdot b = (a + b \bmod 3)$$

np. $0 \cdot 2 = (0 + 2 \bmod 3) = 2$

$$2 \cdot 1 = (2 + 1 \bmod 3) = 0$$

algebra grupowa $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$ to...

$$\{f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C}\}$$

[przestrzeń liniowa]

ze strukturą mnożenia: dla $f, g \in \mathbb{C}\mathbb{Z}_3$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{\substack{a, b \in \mathbb{Z}_3 \\ a \cdot b = x}} f(a) \cdot g(b)$$

algebra grupowa $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$ to...

... zbiór formalnych kombinacji liniowych

$$\left\{ f_0 \cdot 0 + f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 : f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

mnożenie:



$$\begin{aligned} (2 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2) &= \\ &= \underline{8 \cdot 0 \cdot 1} + \underline{6 \cdot 0 \cdot 2} + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \end{aligned}$$

algebra grupowa $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$ to...

... zbiór formalnych kombinacji liniowych

$$\left\{ f_0 \cdot 0 + f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 : f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

mnożenie:

$$\begin{aligned} & (2 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = \\ & = \underline{8 \cdot 0 \cdot 1} + \underline{6 \cdot 0 \cdot 2} + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = \\ & = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \end{aligned}$$

algebra grupowa $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$ to...

... zbiór formalnych kombinacji liniowych

$$\left\{ f_0 \cdot 0 + f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 : f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

mnożenie:

$$\begin{aligned} & (2 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = \\ & = \underline{8 \cdot 0 \cdot 1} + \underline{6 \cdot 0 \cdot 2} + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = \\ & = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = \\ & = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \end{aligned}$$

na ściankach kostki do gry umieszczono elementy $\mathbb{Z}_3$

$X_1, \dots, X_{100}$ to wyniki niezależnych rzutów

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = 0, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{3}$$

rozkład $X_1 \cdots X_{100} = ?$ [algebra grupowa pomaga]

$$\left(0 \cdot 0 + \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 \right)^{100} = ?$$

transformata Fouriera na $\mathbb{C}\mathbb{Z}_3$

trzy odwzorowania
liniowe

$$F_0, F_1, F_2 : \mathbb{C}\mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$F_k \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}_3} f_m m \right] = \sum_{m \in \mathbb{Z}_3} f_m \left[e^{\frac{2\pi i}{3} k} \right]^m$$

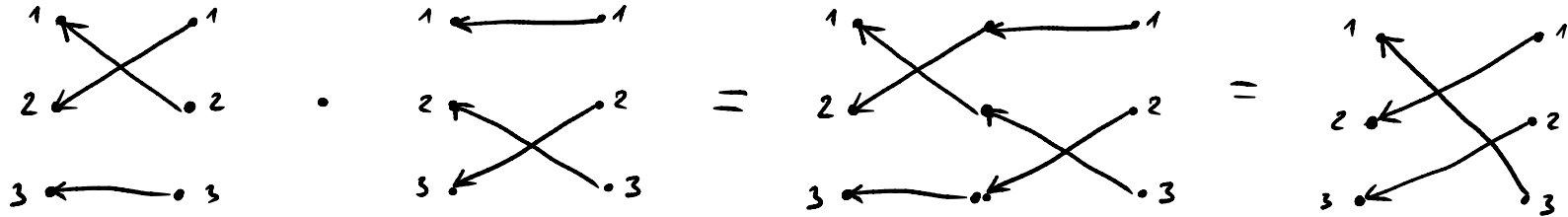
FAKT $F_k(f \cdot g) = F_k(f) \cdot F_k(g)$

czyli F_k jest HOMOMORFIZMEM ALGEBR.

$$F_k \left[\left(\frac{2}{3} \mathbb{1} + \frac{1}{3} \mathbb{2} \right)^{100} \right] = \left[F_k \left(\frac{2}{3} \mathbb{1} + \frac{1}{3} \mathbb{2} \right) \right]^{100}$$

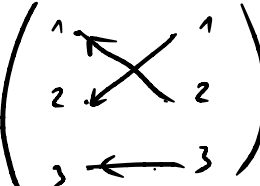
te trzy liczby wyznaczają jednoznacznie $\left[\frac{2}{3} \mathbb{1} + \frac{1}{3} \mathbb{2} \right]^{100}$

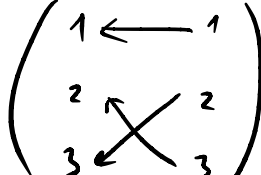
nasz ulubiony przykład: grupa permutacji S_3



mnożenie w grupie to składanie permutacji

pojedyncze **przetwarzanie** trzech kart wygląda tak:

$$P \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \right) = \frac{1}{3}$$


$$P \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \right) = \frac{2}{3}$$


jaki jest rozkład prawdopodobieństwa po 100 przetwarzaniach?

$$\left[\frac{1}{3} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} + \frac{2}{3} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \right]^{100} = ?$$



element algebry grupowej $\mathbb{C}S_3$

transformata Fouriera?

DEFINICJA

jeśli: G - grupa skończona
 V - przestrzeń liniowa, $\dim V < \infty$

$$\varrho: G \longrightarrow GL(V)$$

[odwracalne przekształcenia liniowe]

jest homomorfizmem grup, tzn.

$$\varrho(\pi_1 \pi_2) = \varrho(\pi_1) \varrho(\pi_2) \quad \text{dla } \forall \pi_1, \pi_2 \in G$$

Wówczas mówimy, że

ϱ jest reprezentacją G

a czasem mówimy, że

V jest reprezentacją G

DEFINICJA

jeśli: G - grupa skończona

V - przestrzeń liniowa, $\dim V < \infty$

$$\varrho: G \longrightarrow \cancel{GL(V)} \quad \text{równoważnie: odwracalne}$$

macierze ustalonego rozmiaru

jest homomorfizmem grup, tzn.

$$\varrho(\pi_1 \pi_2) = \varrho(\pi_1) \varrho(\pi_2) \quad \text{dla } \forall \pi_1, \pi_2 \in G$$

Wówczas mówimy, że

ϱ jest reprezentacją G

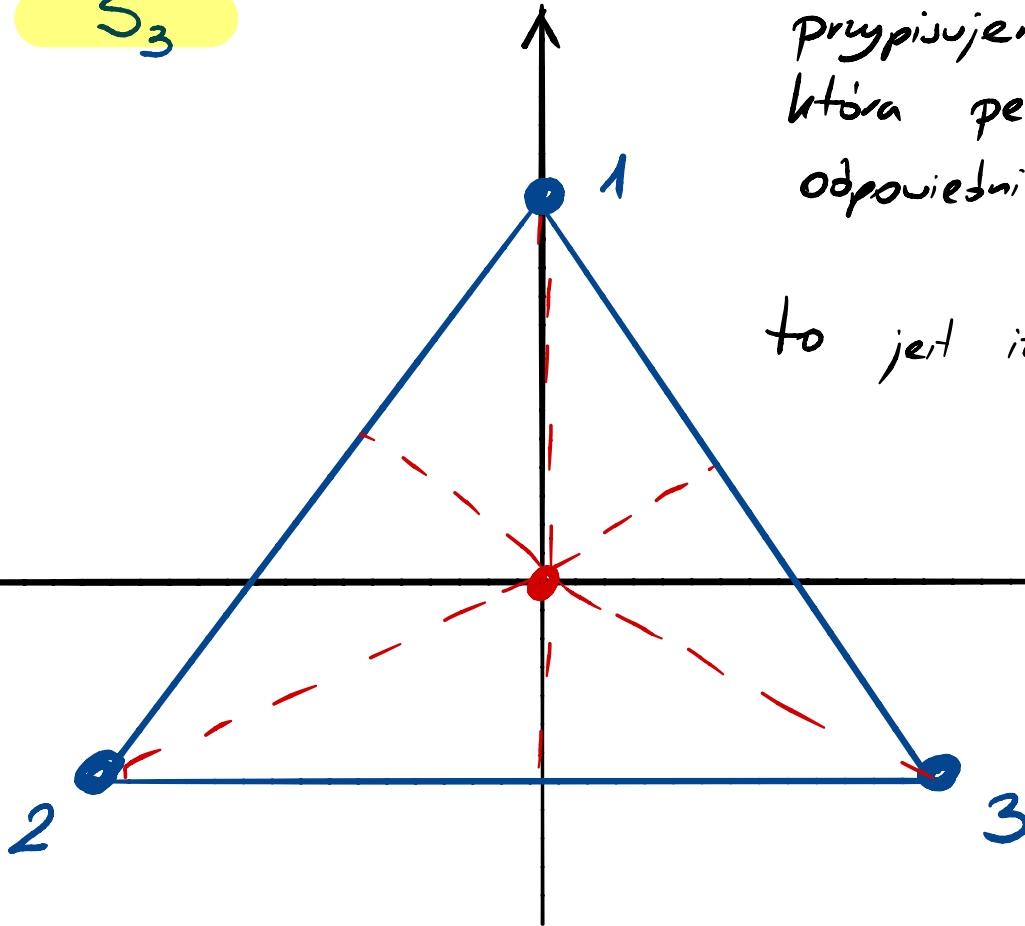
a czasem mówimy, że

V jest reprezentacją G

PRZYKŁADY
REPREZENTACJI
 S_3

permutacji $\pi \in S_3$
przypisujemy izometrię trójkąta,
która permutuje wierzchołki w
odpowiedni sposób.

to jest izometria liniowa



PRZYKŁADY REPREZENTACJI

S_3

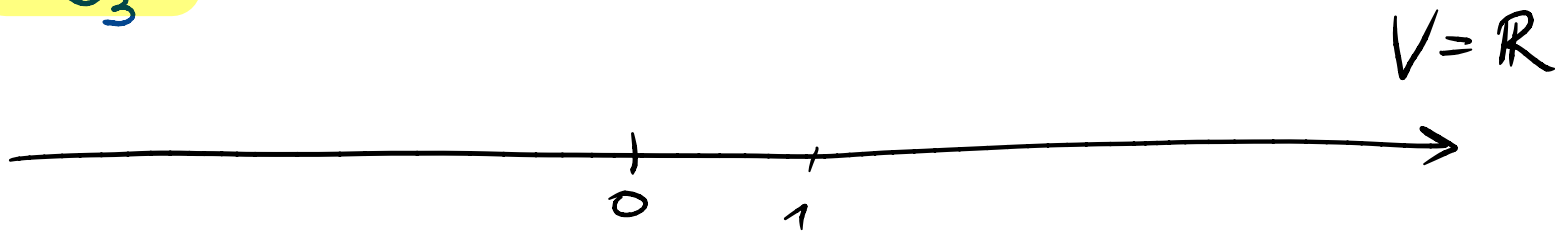


Każdej permutacji π przypiszemy odwzorowanie liniowe

$$\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{lub macierz } [1])$$

$S_{\square\square\square}$

PRZYKŁADY
REPREZENTACJI
 S_3



$$\rho(\pi) = \begin{cases} \text{id} & = [1] \\ -\text{id} & = [-1] \end{cases}$$

jeśli π jest parzysta

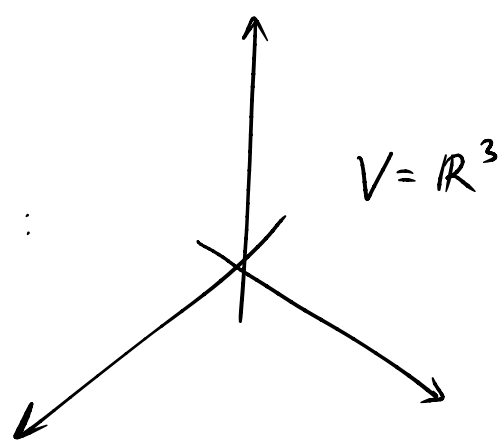
jeśli π jest nieparzysta

S_3

PRZYKŁADY REPREZENTACJI S_3

permutacja $\pi \in S_3$ działa permutując współrzędne wektora:

$$\rho \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



podprzestrzenie niezmiennicze dla wszystkich $\rho(\pi)$:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \Bigg| \quad Z = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x + y + z = 0 \right\}$$

obcięcie ρ do W lub Z również jest reprezentacja

Niech V będzie reprezentacją grupy G .

Jeśli istnieje przestrzeń liniowa $W \subseteq V$

taka, że $\forall g \in G \quad \rho(g)W \subseteq W$,

oraz $W \neq \{0\}$, $W \neq V$

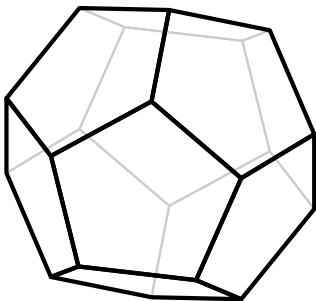
to mówimy, że V jest redukowalna.

W przeciwnym razie V jest nieredukowalna

przestrzeń W o
tej własności również
jest reprezentacją
tej samej grupy G .

FUJ!

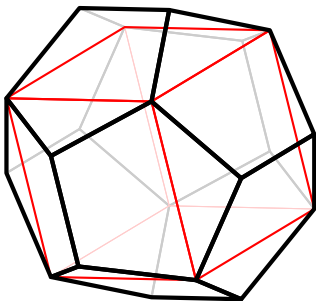
BRAWO!



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

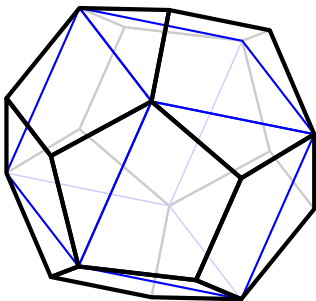
odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

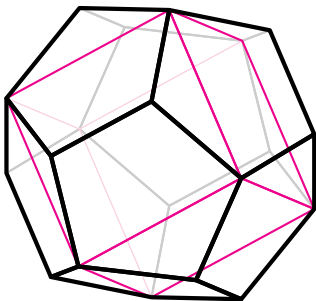
odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

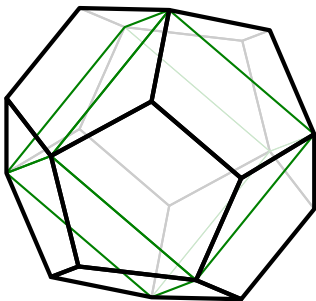
odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

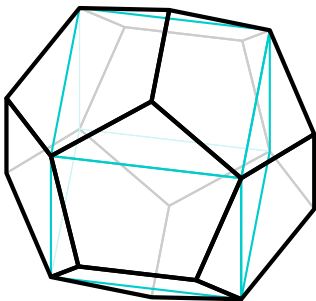
odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześcianów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

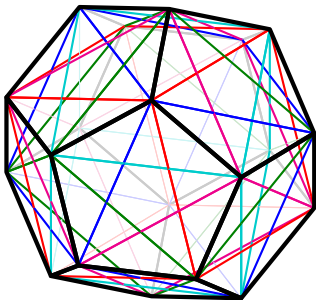
odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

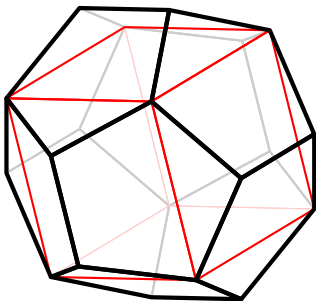
odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$



dowolny obrót dwunastościanu
zadaje **parzystą** permutację
pięciu sześciątów,
element grupy alternującej
 $\mathfrak{A}(5)$

to jest bijekcja

odwrócenie optyki:
reprezentacja grupy
alternującej $\mathfrak{A}(5)$

transformata Fouriera na $\mathbb{C}S_3$

trzy
wspierające
funkcje

$$\rho_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} : \mathbb{C}S_3 \longrightarrow M_2$$

zespólone
macierze 2×2

$$\rho_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} : \mathbb{C}S_3 \longrightarrow M_1 = \mathbb{C}$$

zespólone
macierze 1×1

$$\rho_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}} : \mathbb{C}S_3 \longrightarrow M_1 = \mathbb{C}$$

zespólone
macierze 1×1

$$\rho_X \left[\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{3} & \begin{array}{c} \swarrow \times \\ \leftarrow \end{array} & + & \frac{2}{3} & \begin{array}{c} \leftarrow \times \\ \swarrow \end{array} \end{array} \right]}^{100} \right] = \left(\rho_X \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{3} & \begin{array}{c} \swarrow \times \\ \leftarrow \end{array} & + & \frac{2}{3} & \begin{array}{c} \leftarrow \times \\ \swarrow \end{array} \end{array} \right] \right)^{100}$$

= ?

potęgowanie macierzy 1×1 i 2×2
nie jest takie bolesne

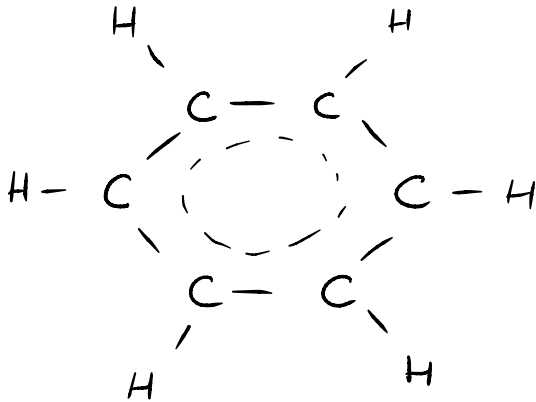
4+1+1 równań wystarczy, by
wyznaczyć element $\mathbb{C}S_3$ ☺

po co ludzkości teoria reprezentacji?

po co ludzkości teoria reprezentacji?

„jeśli Twój problem ma symetrię,

wykorzystaj ją!”



chemia kwantowa:

Każda przestrzeń własna
hamiltonianu jest
reprezentacją grupy
izometrii sześciokąta

po co ludzkości teoria reprezentacji S_n ?

Pytanie: ile razy należy przetasować talis kart,
tak aby była dobrze przetasowana?

probabilistyka na grupach
analiza harmoniczna na grupach
substytut transformaty Fouriera

po co ludzkości teoria reprezentacji S_n ?

Pytanie: ile prostych przecina
zadane cztery proste w $\mathbb{R}^3$?

geometria algebraiczna
rachunek Schuberta
wielomiany Schura

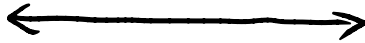
po co ludzkości teoria reprezentacji S_n ?

Pytanie: czy $P \neq NP$?

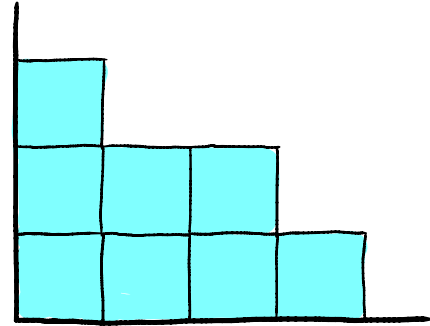
geometryczna teoria złożoności

\begin{science fiction}

nieredukowalne
reprezentacje
 S_n



diagramy Younga
złożone z
 n klatek



Co można powiedzieć o reprezentacjach S_n
w granicy $n \rightarrow \infty$?

jak wygląda typowa reprezentacja S_n ?

grupa S_n działa na przestrzeni liniowej $\mathbb{C}S_n$
zatem $\mathbb{C}S_n$ jest *najpiskniejsza* reprezentacja *na świecie* | *reprezentacja
lewa
regularna*

$$\mathbb{C}S_n = \bigoplus_{\lambda} V^{\lambda} \oplus \dots \oplus V^{\lambda}$$

*rozkład na
nieredukowalne
składowiki*

jak wygląda losowy nieredukowalny składowik?

losowy nieredukowalny składnik reprezentacji $\mathbb{C}S_n$

FAKT.1.

$$P(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!} \quad \text{gdzie}$$

f^λ = liczba Standardowych Tableau Younga
o kształcie λ

6			
2	5	8	
1	3	4	7

Zagadka: dlaczego $\sum_{\lambda} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} = 1$?

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha jest bijekcją...

wejście:

- ciąg $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$

wyjście:

- semistandardowe tableau P ,
- standardowe tableau Q ,

P i Q mają ten sam kształt
złożony z n klatek

przykład:

$\mathbf{w} = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(\mathbf{w})$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(\mathbf{w})$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74	99		
	23	53	70	
18 ↗	16	37	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74	99			
	23	53	70		
18 ↗	16	37	41	82	

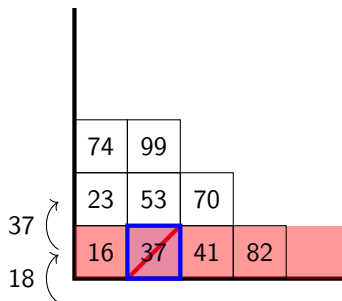
insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

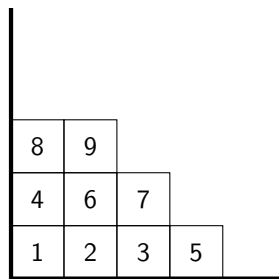
recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



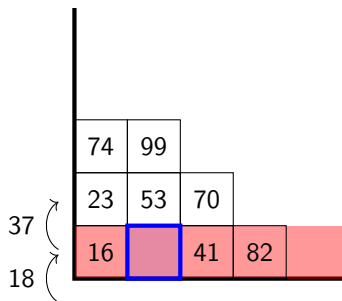
insertion tableau $P(w)$



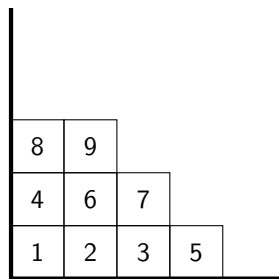
recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



insertion tableau $P(w)$



recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74	99			
	23	53	70		
37 ↗	16	18	41	82	

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74	99		
37 ↗	23	53	70	
	16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74	99		
37 ↗	23	53	70	
	16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

The insertion tableau $P(w)$ is a Young diagram with three rows. The first row contains 74 and 99. The second row contains 23, 53, 70, and a red-shaded cell. The third row contains 16, 18, 41, and 82. The cell containing 53 is highlighted with a blue border and a red diagonal line. To the left of the tableau, a bracket groups the values 53 and 37, with an arrow pointing to the cell containing 53.

74	99		
23	53	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

The recording tableau $Q(w)$ is a Young diagram with three rows. The first row contains 8 and 9. The second row contains 4, 6, and 7. The third row contains 1, 2, 3, and 5.

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

	74	99		
53 ↗	23		70	
37 ↗	16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

53 ↗

74	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

53 ↗

74	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

53 ↗

74	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

The insertion tableau $P(w)$ is a Young diagram with three rows. The first row has a red cell followed by a red cell containing 99 and a long red bar. The second row contains 23, a blue cell containing 37, and 70. The third row contains 16, a blue cell containing 18, 41, and 82. Brackets on the left indicate the insertion of 74 into the first row and 53 into the second row.

		99		
23	37	70		
16	18	41	82	

insertion tableau $P(w)$

The recording tableau $Q(w)$ is a Young diagram with three rows. The first row contains 8 and 9. The second row contains 4, 6, and 7. The third row contains 1, 2, 3, and 5.

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74 ↗

53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

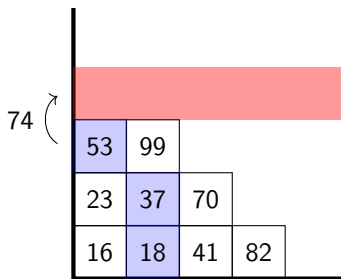
insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

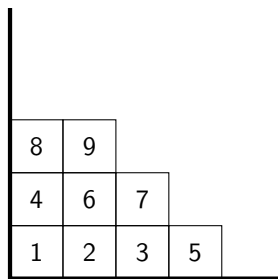
recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



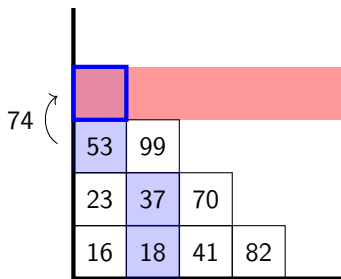
insertion tableau $P(w)$



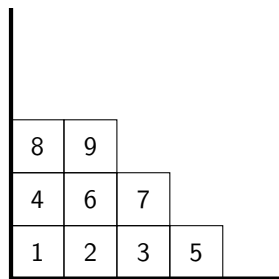
recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny



insertion tableau $P(w)$



recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

insertion tableau $P(w)$

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

nowa klatka

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha — krok indukcyjny

74			
53	99		
23	37	70	
16	18	41	82

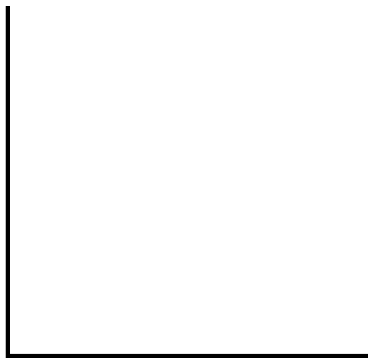
insertion tableau $P(w)$

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

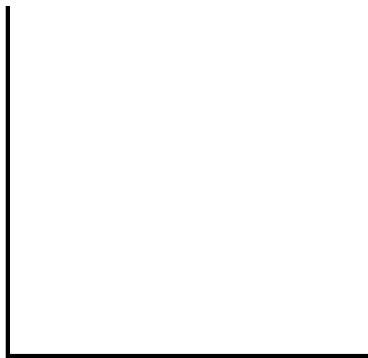
recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 18)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



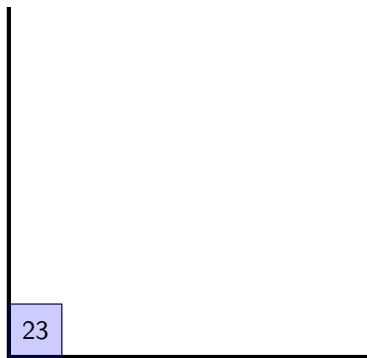
insertion tableau $P(w)$



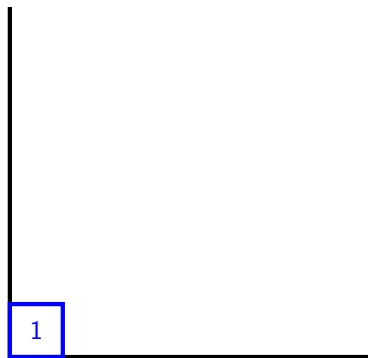
recording tableau $Q(w)$

$$w = \emptyset$$

algorithm Robinsona–Schensted–Knutha



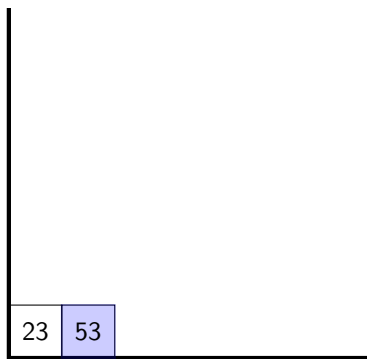
insertion tableau $P(w)$



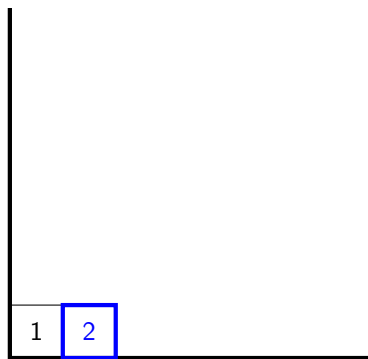
recording tableau $Q(w)$

$$w = (23)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha



insertion tableau $P(w)$



recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

A diagram of an insertion tableau $P(w)$. It consists of a single row of three boxes. The first box contains the number 23, the second box contains 53, and the third box contains 74. The third box is highlighted with a light blue background. The tableau is positioned between a vertical line on the left and a horizontal line on the bottom.

23	53	74
----	----	----

insertion tableau $P(w)$

A diagram of a recording tableau $Q(w)$. It consists of a single row of three boxes. The first box contains the number 1, the second box contains 2, and the third box contains 3. The third box is outlined with a blue border. The tableau is positioned between a vertical line on the left and a horizontal line on the bottom.

1	2	3
---	---	---

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

A diagram of an insertion tableau $P(w)$. It consists of two rows of boxes. The first row has one box containing the number 23. The second row has three boxes containing the numbers 16, 53, and 74. The boxes containing 23 and 16 are shaded light blue.

23		
16	53	74

insertion tableau $P(w)$

A diagram of a recording tableau $Q(w)$. It consists of two rows of boxes. The first row has one box containing the number 4. The second row has three boxes containing the numbers 1, 2, and 3. The box containing 4 is outlined with a thick blue border.

4		
1	2	3

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

A Young diagram representing an insertion tableau. It has two rows. The first row contains the number 23. The second row contains the numbers 16, 53, 74, and 99. The number 99 is highlighted in green.

23			
16	53	74	99

insertion tableau $P(w)$

A Young diagram representing a recording tableau. It has two rows. The first row contains the number 4. The second row contains the numbers 1, 2, 3, and 5. The number 5 is highlighted with a blue border.

4			
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

23	74		
16	53	70	99

insertion tableau $P(w)$

4	6		
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

23	74	99	
16	53	70	82

insertion tableau $P(w)$

4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
23	53	99	
16	37	70	82

insertion tableau $P(w)$

8			
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74	99		
23	53	70	
16	37	41	82

insertion tableau $P(w)$

8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53	99		
23	37	70	
16	34	41	82

insertion tableau $P(w)$

10			
8	9		
4	6	7	
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53	99		
23	37	70	82
16	34	41	73

insertion tableau $P(w)$

10			
8	9		
4	6	7	11
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34, 73)$$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53			
23	99		
16	37	70	82
2	34	41	73

insertion tableau $P(w)$

12			
10			
8	9		
4	6	7	11
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34, 73, 2)$

algorytm Robinsona–Schensteda–Knutha

74			
53	99		
23	37		
16	34	70	82
2	24	41	73

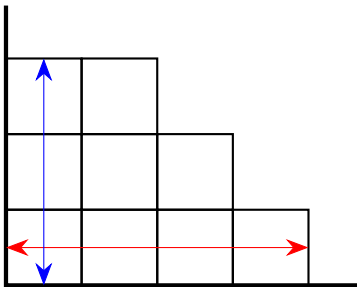
insertion tableau $P(w)$

12			
10	13		
8	9		
4	6	7	11
1	2	3	5

recording tableau $Q(w)$

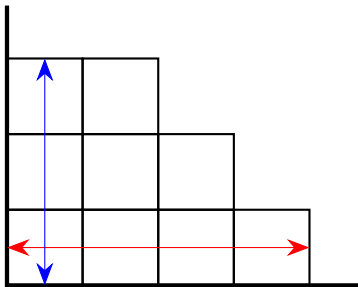
$w = (23, 53, 74, 16, 99, 70, 82, 37, 41, 34, 73, 2, 24)$

długość pierwszej kolumny = długość najdłuższego podciągu malejącego



długość pierwszego wiersza
=
długość najdłuższego
podciągu rosnącego

długość pierwszej kolumny = długość najdłuższego podciągu malejącego



długość pierwszej wiersza
=
długość najdłuższego
podciągu rosnącego

na jakie zabawne pytanie
dotyczące
podciągów rosnących
odpowiedź brzmi:
*„łączna długość
pierwszych dwóch wierszy”?*

jeśli permutacji π
odpowiada para tableau (P, Q)
to jakie tableau
odpowiadają
permutacji odwrotnej π^{-1} ?

losowy nieredukowalny składnik reprezentacji $\mathbb{C}S_n$

FAKT.1.

$$P(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!} \quad \text{gdzie}$$

f^λ = liczba Standardowych Tableau Younga
o kształcie λ

6			
2	5	8	
1	3	4	7

Zagadka: dlaczego $\sum_{\lambda} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} = 1$?

losowy nieredukowalny składnik reprezentacji $\mathbb{C}S_n$

FAKT 1.

$$P(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!} \quad \text{gdzie}$$

f^λ = liczba Standardowych Tableau Younga o kształcie λ

6			
2	5	8	
1	3	4	7

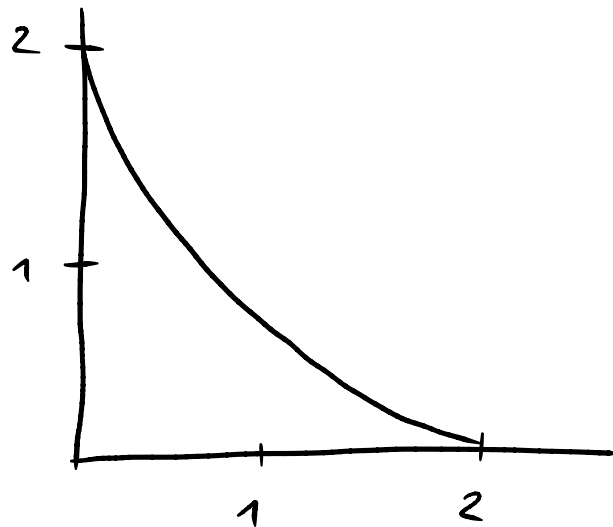
FAKT 2.

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} \text{hak}_{\square}} = \frac{8!}{1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}$$

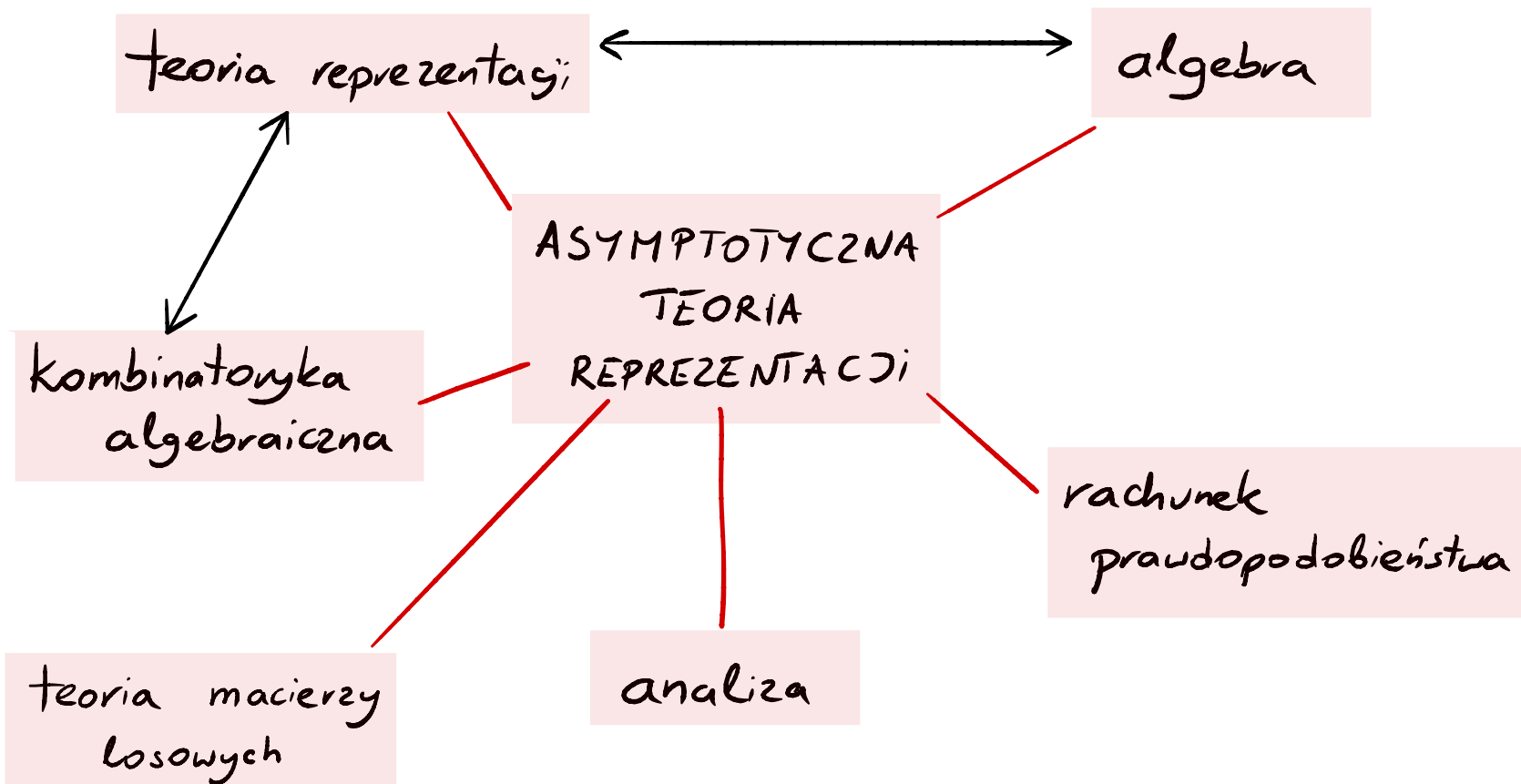
$\text{hak}_{\square} = 4$

konkluzja:

prawo wielkich liczb LOGAN-SHEPP-VERSHIK-KEROV



„istnieje konkretny kształt graniczny”

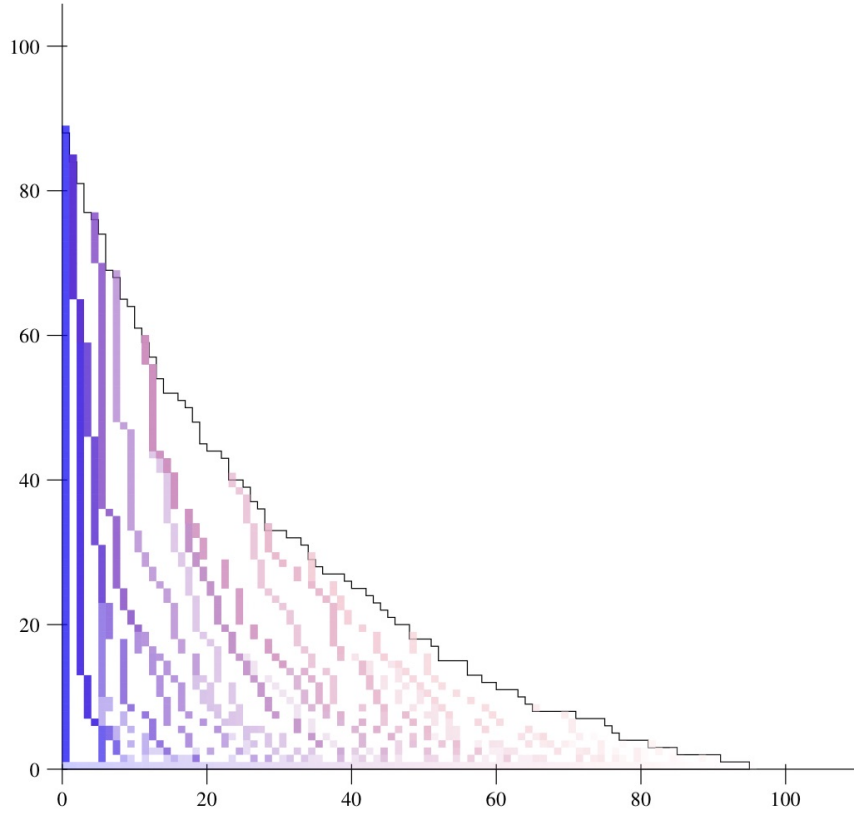


co czytać? literatura i bonusy:

psniady.impan.pl/lecture-notes

szukasz promotora?

psniady.impan.pl/jobs



szkoła letnia z kombinatoryki algebraicznej

6–10 lipca 2020, Kraków

trzy wątki tematyczne

(5 godzin wykładów + 1 godzina ćwiczeń każdy)

invited speakers:

- ▶ Valentin Féray,
- ▶ Vic Reiner,
- ▶ Anne Schilling,

→ psniady.impan.pl/school